Funzione di trasferimento

Sistemi lineari a tempo discreto

Definizione di FdT e proprietà

Movimento (caso scalare - $n = 1$)

$$\begin{cases} x(k+1) = ax(k) + bu(k) \\ y(k) = cx(k) + du(k) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(0) = \bar{x} \\ u(k), k \geq 0 \end{array}$$

$$\boxed{x(k) = a^k \bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} bu(i)}$$

... con le Z-trasformate:

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \mathcal{Z}\{ax(k) + bu(k)\}$$

$$zX(z) - z\,\bar{x} = aX(z) + bU(z)$$

$$(z-a)X(z) = z\,\bar{x} + bU(z)$$

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-a}\bar{x} + \frac{b}{z-a}U(z)}$$

usando la proprietà $\mathcal{Z}[f(k) * g(k)] = F(z) \cdot G(z)$

e la trasformata notevole $\mathcal{Z}[a^k 1(k)] = \dfrac{z}{z-a}$

$\mathcal{Z}^{-1}$ $$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = a^k\bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}bu(i), k \geq 0$$

Movimento dello stato: caso generale

$$x(k) = A^k \bar{x} + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i)$$

Come determino questa espressione?
Posso utilizzare anche in questo caso
la Z—trasformata?

Movimento dell'uscita: caso generale

$$y(k) = C\,A^k\,\bar{x} + C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}\,Bu(i) + Du(k)$$

Come determino questa espressione?
Posso utilizzare anche in questo caso
la Z—trasformata?

Z-Trasformata di un vettore

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} \triangleq \begin{bmatrix} X_1(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix}$$

- Proprietà

$$\mathcal{Z}\{A\,x(k)\} = A\mathcal{Z}\{x(k)\}$$

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{Z}\{x_1(k+1)\} \\ \vdots \\ \mathcal{Z}\{x_n(k+1)\} \end{bmatrix} = \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} z\,(X_1(z) - x_1(0)) \\ \vdots \\ z\,(X_n(z) - x_n(0)) \end{bmatrix} = \cdots$$

$$= z\,[X(z) - x(0)]$$

- Sistemi dinamici lineari stazionari

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Operando la Z-trasformata ad ambo i membri dell'eq. di stato:

$$z\,[X(z) - x(0)] = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = z\,x(0) + BU(z)$$

NB!

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1} z\,x(0) + (zI - A)^{-1} BU(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$\boxed{Y(z) = C(zI - A)^{-1} z\,x(0) + \left[C(zI - A)^{-1}B + D\right] U(z)}$$

$$e^{At} \longleftrightarrow (sI-A)^{-1}$$

$$A^{k} \longleftrightarrow (zI-A)^{-1} \cdot z$$

$$x(t) = e^{At}x(0) \quad X(s) = (sI-A)^{-1}x(0)$$

$$x(k) = A^{k}x(0) \longleftrightarrow X(z) = (zI-A)^{-1}z\,x(0)$$

- Quando $x(0) = 0$

$$Y(z) = \underbrace{\left[\overbrace{C}^{p \times n}\overbrace{(zI - A)^{-1}}^{n \times n}\overbrace{B}^{n \times m} + \overbrace{D}^{p \times m}\right]}_{\substack{p \times m \\ G(z)}} U(z)$$

Funzione di trasferimento

Per il movimento forzato dell'uscita avevamo scritto $y_f(k) = C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bu(i) + Du(k)$