

30/05/2013

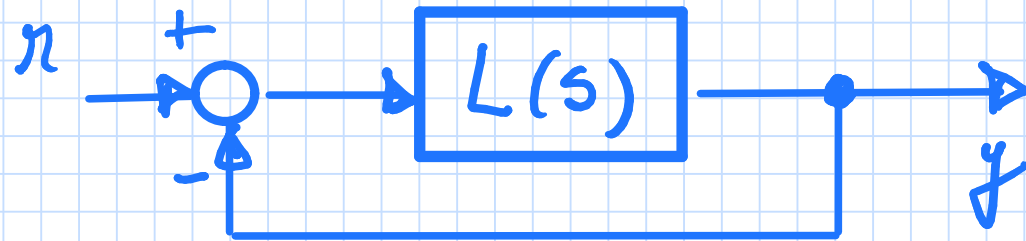
Fondamenti di Automatica

Appunti delle Esercitazioni

Esercizi risolti: diagrammi di Bode e Nyquist,
applicazione dei criteri di Bode e Nyquist

1° esercizio

È assegnato il sistema a tempo continuo descritto dallo schema e dalla



dove

$$L(s) = 4 \cdot \frac{(1+s)}{(1+2s) \cdot \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

Rispondere alle seguenti domande:

- è applicabile il criterio di Bode?
motivare la risposta
- tracciare il diagramma polare della risposta in frequenza $L(j\omega)$
- determinare quanto valgono il margine di guadagno k_m ed il margine di fase φ_m
- applicare il criterio di Nyquist per analizzare la stabilità a ciclo chiuso del sistema

diagrammi asintotici di Bode e criterio di Bode

Per poter stabilire se il criterio di Bode sia applicabile bisogna verificare se

- la funzione di trasferimento del sistema NON possiede poli a parte reale positiva
- il diagramma del modulo della risposta in frequenza incontra una sola volta la retta orizzontale a quota 0dB e l'attraversa dall'alto verso il basso

1° punto $\Rightarrow$ la funzione di trasferimento possiede queste caratteristiche

guadagno statico $\mu_L = +9$

zeri

$$z_1 = -1$$

poli

$$p_1 = -\frac{1}{2} \quad p_2 = -10$$

$\leftarrow$ NON ci sono poli a parte reale positiva! La prima condizione è soddisfatta!

2° punto $\Rightarrow$ c'è opportuno tracciare i diagrammi asintotici di Bode della risposta in frequenza $L(j\omega)$ [incluso quello del modulo $|L(j\omega)|$]

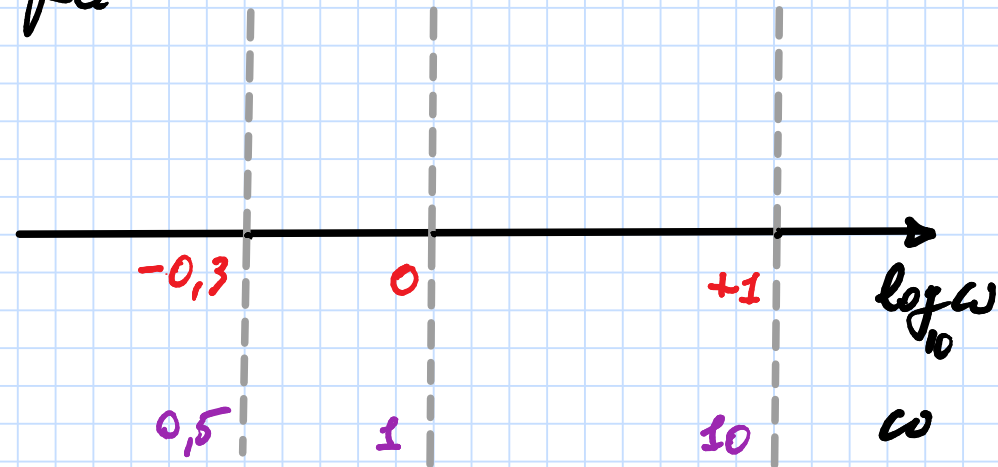
Tracciamento dei diagrammi asintotici di Bode

pulsazioni caratteristiche associate a zeri e poli

$$z_1 = -1 \longrightarrow \omega_{z_1} = +1 \text{ rad/s}$$

$$p_1 = -\frac{1}{2} \longrightarrow \omega_{p_1} = +0,5 \text{ rad/s}$$

$$p_2 = -10 \longrightarrow \omega_{p_2} = +10 \text{ rad/s}$$



Non ci sono né poli né zeri per $\omega = 0 \text{ rad/s}$

quindi il primo tratto del diagramma asintotico del modulo è orizzontale:

$$0 \leq \omega < 0,5 \quad M_{rs} = 4 \quad M_{rs}|_{dB} = 20 \log_{10} 4 \approx 12 \text{ dB}$$

per $\omega = 0,5$ trovo un polo semplice

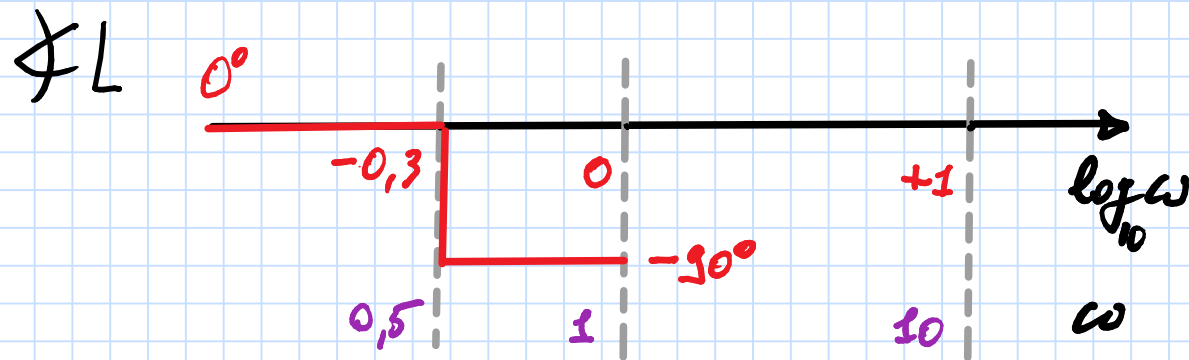
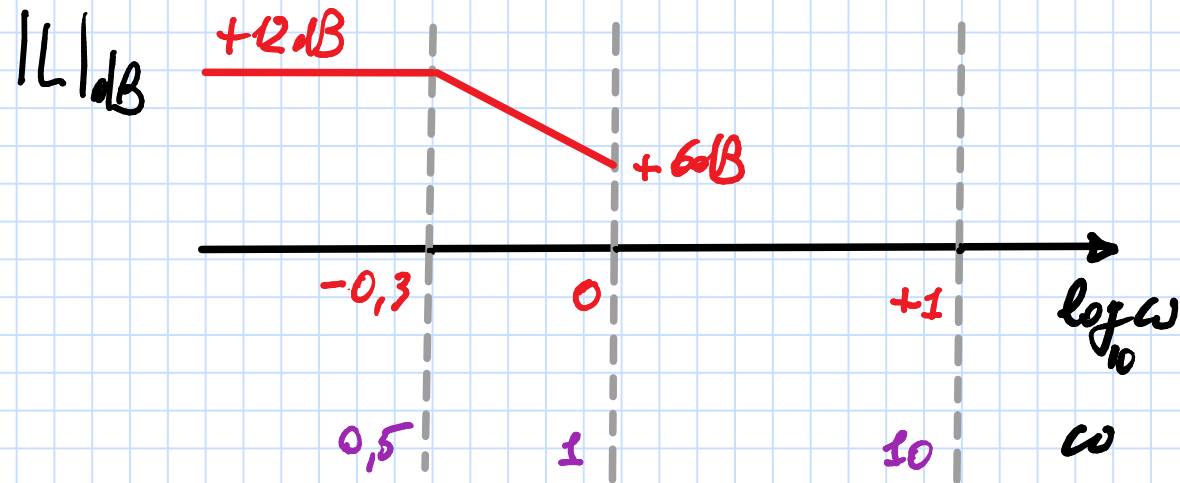
$0,5 \leq \omega < 1$ seguito da una retta con pendenza -20 dB/decade

$$M_{es}|_{dB} = -20 \left[\log_{10} \omega - \log_{10} \frac{1}{2} \right] + 12$$

$$M_{zs}|_{dB} = -20 \left[\log_{10} \omega - \log_{10} \frac{1}{2} \right] + 12 = -20 \log_{10} \omega + 6$$

fr retta per un punto noto $(\bar{x}, \bar{y})$ e un coefficiente angolare in espression: $y = m(x - \bar{x}) + \bar{y}$

Prima parte dei diagrammi asintotici



In corrispondenza di $\omega = 1$ c'è la pulsanza caratteristica dello zero:

- il prossimo tratto del diagramma asintotico del modulo della rigola in frequenza è un tratto orizzontale

pendenza tratto precedente
 -20dB/decade

pendenza tratto attuale
 $-20 + 20 \rightarrow 0\text{dB/decade}$
tratto precedente
incremento di pendenza dovuto alla presenza dello zero

- la fase asintotica si incrementa di $+90^\circ$

Per $\omega = +10$ infine "si incontra" l'ultimo polo

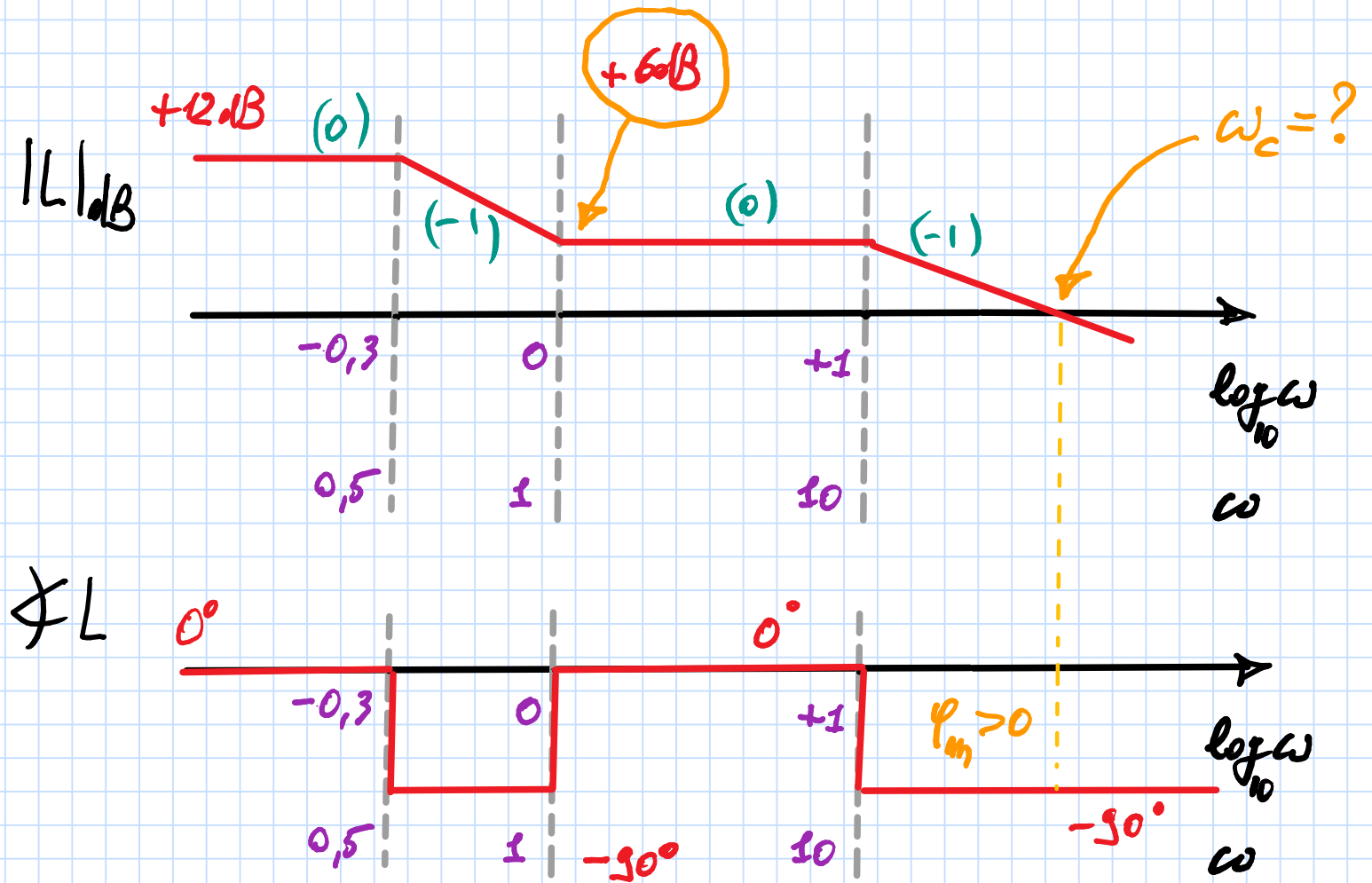
- la pendenza dell'ultimo tratto del diagramma asintotico del modulo corrisponde a quella del tratto precedente, decrementata di 20dB/decade

pendenza del
tratto precedente 0dB/decade

pendenza attuale: $0 - 20 \rightarrow -20\text{dB/decade}$
contributo dovuto alla presenza del polo

- la fase asintotica si decrementa di 90°

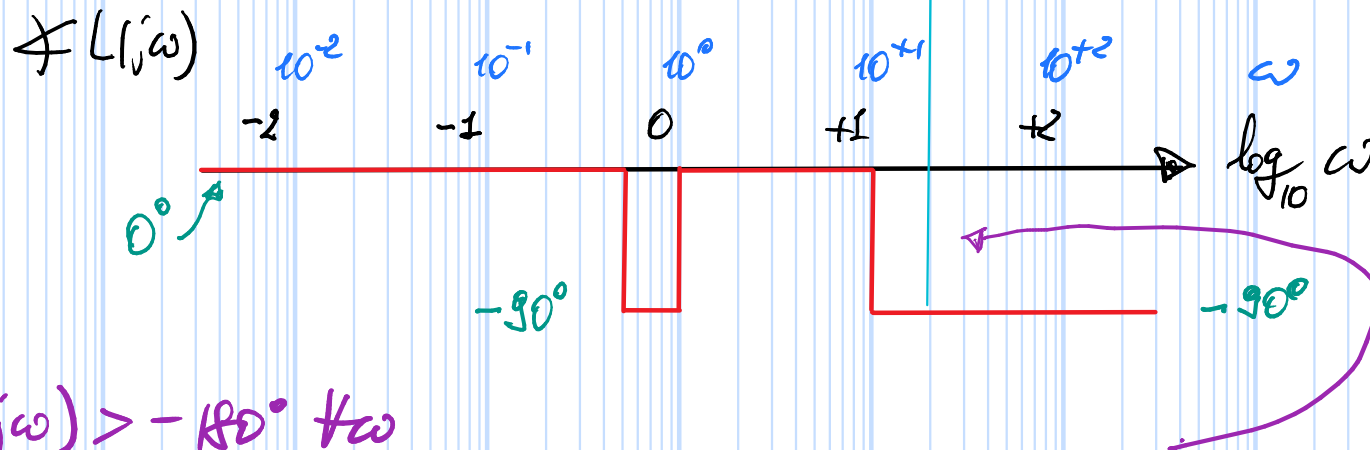
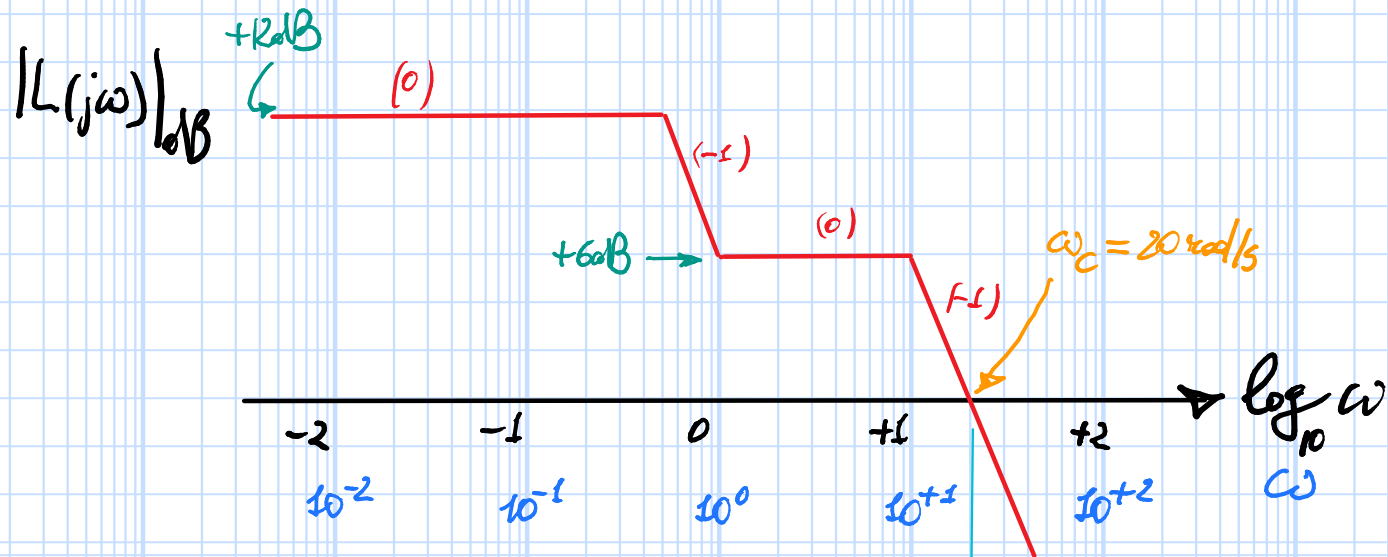
In definitiva il diagramma asintotico cercato è



Per stimare ω_c si può ricorrere all'equazione dell'ultimo tratto del diagramma asintotico del modulo

$$M_{as}|_{dB} = -20 [\log_{10} \omega - \log_{10} 10] + 6 \leftarrow \text{perché } M_{as}|_{dB} = 0 \text{ dB e cerca } \omega_c$$

$$-20 \log_{10} \omega_c + 20 + 6 = 0 \quad 20 \log_{10} \omega_c = 26 \quad \omega_c = 20 \text{ rad/s}$$

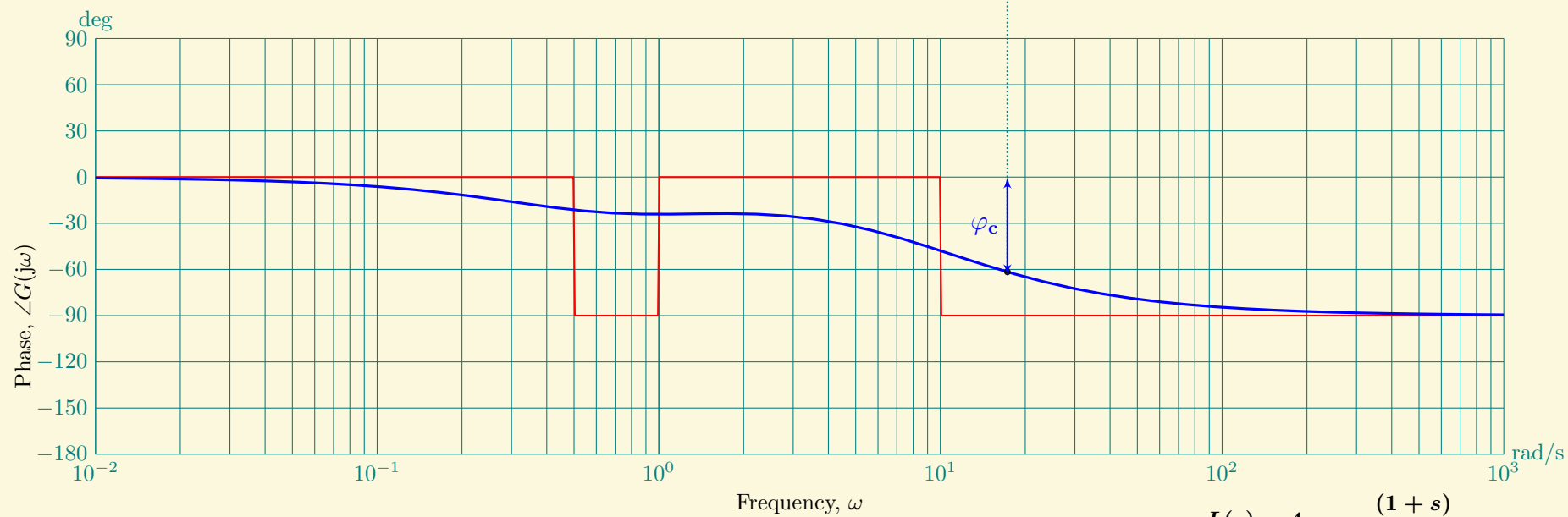
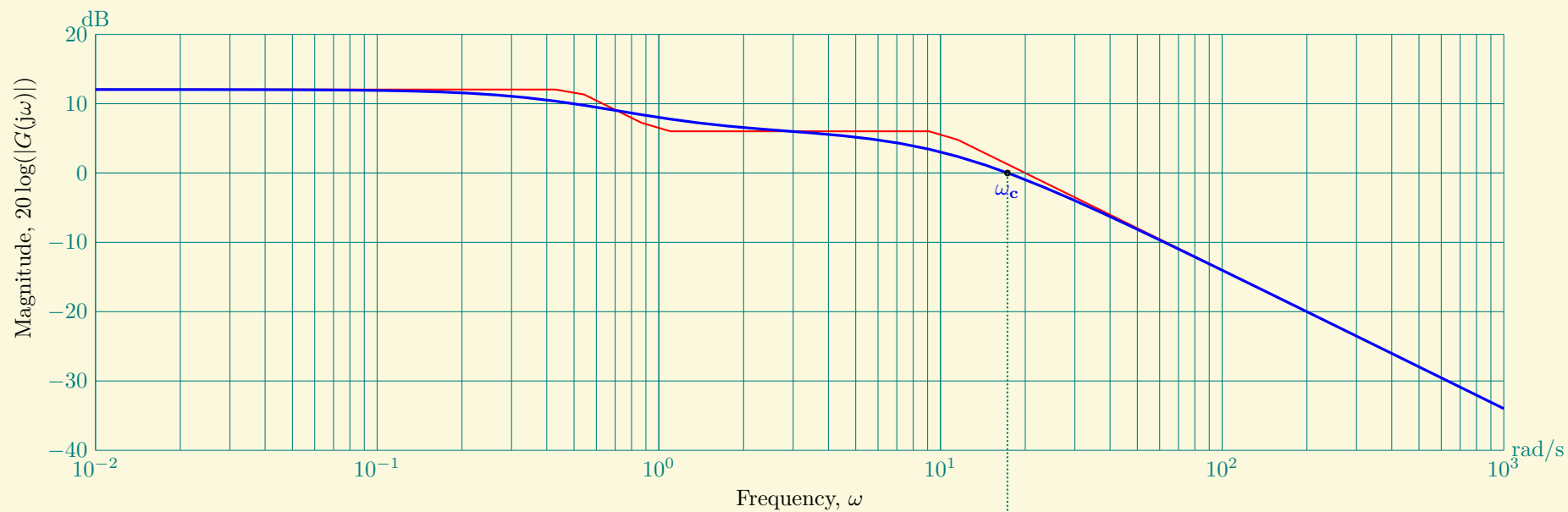


$k_m = ?$

AB $p(j\omega) > -180^\circ \forall \omega$

$\downarrow$
 $k_m \rightarrow +\infty$

$\varphi_c < 90^\circ$ sicuramente
 quindi $\varphi_m > 90^\circ$ (perché?)
 [soluzione estremamente $\varphi_c \neq \varphi_m$]



$$L(s) = 4 \frac{(1+s)}{(1+2s) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

soluzioni dei due problemi di applicazione del criterio di Zode

Analizzando i diagrammi asintotici si può affermare che:

- il diagramma del modulo della risposta in frequenza interseca la linea a 0 dB una sola volta, dall'alto verso il basso
- la funzione di trasferimento del sistema NON possiede poli a parte reale positiva
[analizzato in precedenza]

Il criterio
di Zode
è
applicabile!

applicazione del criterio di Bode

- $\mu = +4$

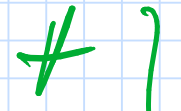


- $\omega_c \approx 20 \text{ rad/s}$



$$\varphi_c < -90^\circ \rightarrow \varphi_M > 90^\circ$$

$$\mu > 0$$



$$\varphi_M > 0$$



il sistema
è
asintoticamente
stabile
a ciclo
chiuso

diagramma polare della risposta in frequenza

$$L(j\omega) = \frac{4(1+j\omega)}{(1+2j\omega)(1+j\frac{\omega}{10})}$$

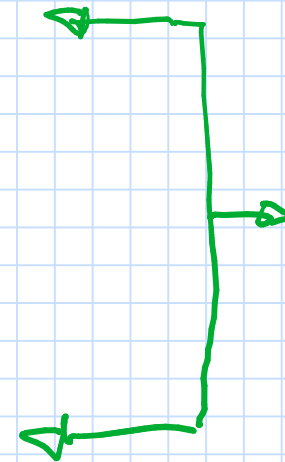
Dall'analisi dei diagrammi asintotici di Bode deduco che:

- comportamento su $\omega \rightarrow 0^+$

$$\omega = 0 \rightarrow \begin{cases} |L| = 4 \\ \angle L = 0^\circ \end{cases}$$

- comportamento su $\omega \rightarrow +\infty$

$$\omega \rightarrow +\infty \rightarrow \begin{cases} |L| \rightarrow 0 \\ \angle L \rightarrow -90^\circ \end{cases}$$



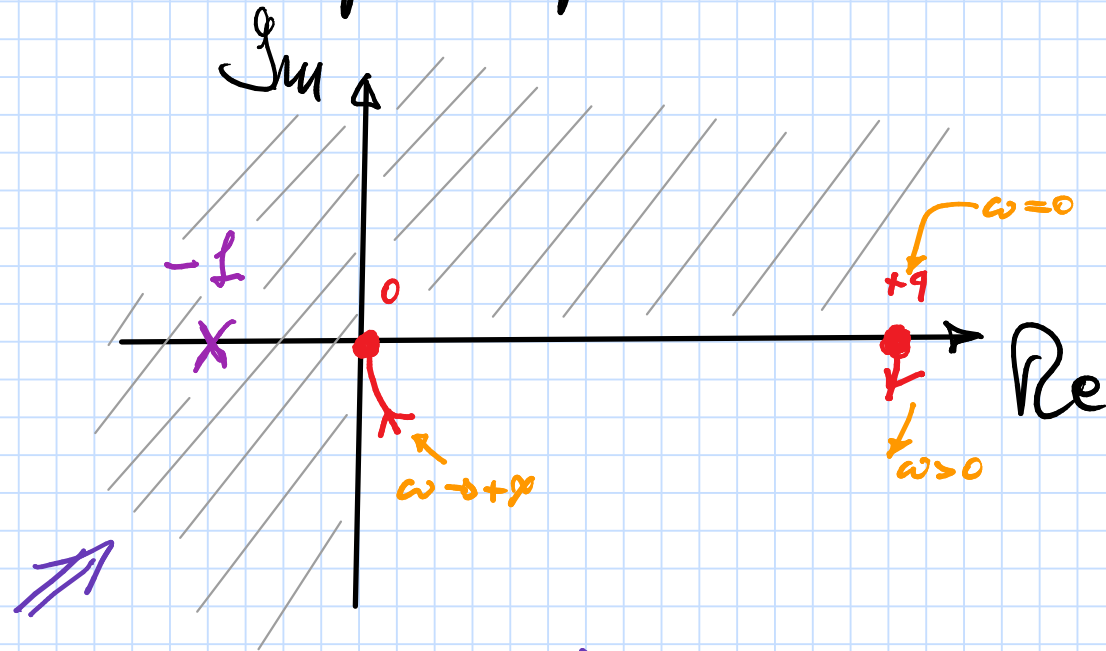
corso
2 punti
del diagramma
polare

- quadranti occupati dal diagramma polare

dei diagrammi
di Bode $\rightarrow -90^\circ < \varphi \leq 0^\circ \rightarrow$

il diagramma polare
occupa il IV quadrante

Un primo abbozzo di diagramma polare



dato che $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \rightarrow 0$
NON c'è interferenza
col semi-asse reale
negativo!

Rimangono da analizzare

- eventuali intersezioni con gli assi
[escluso il semiasse reale negativo]?
- determinazione di punti del diagramma
corrispondenti a valori precisi della
pulsazione ω

intersezioni con gli assi

$$L(j\omega) = \frac{4(1+j\omega)}{(1+2j\omega)(1+j\frac{\omega}{10})} = \frac{4(1+j\omega)}{(1-\frac{\omega^2}{5}) + j\frac{21}{10}\omega} =$$
$$= \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

Ricordando che vale

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2} = \frac{\overbrace{ac+bd}^{\text{Re}}}{c^2+d^2} + j \frac{\overbrace{bc-ad}^{\text{Im}}}{c^2+d^2}$$

applicando questa elaborazione ad $L(j\omega)$ si ottiene

$$L(j\omega) = 4 \cdot \frac{\left[1\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right) + \frac{21}{10}\omega^2\right]}{\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right)^2 + \frac{441}{100}\omega^2} + 4j \frac{\omega\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right) - \frac{21}{10}\omega}{\left(1-\frac{\omega^2}{5}\right)^2 + \frac{441}{100}\omega^2} = \longrightarrow$$

$$L(j\omega) = 9 \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{19}{10}\omega^2}{1 + \frac{401}{100}\omega^2 + \frac{\omega^4}{25}}}_{\text{Re}(\omega)} - 9j\omega \underbrace{\frac{\frac{11}{10} + \frac{\omega^2}{5}}{1 + \frac{401}{100}\omega^2 + \frac{\omega^4}{25}}}_{+j\text{Im}(\omega)}$$

Studio di $\text{Re}(\omega)$ e di $\text{Im}(\omega)$ al variare di ω

$$\bullet \quad \omega \rightarrow 0^+ \quad \begin{cases} \text{Re} \rightarrow 9 \\ \text{Im} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \omega \rightarrow +\infty \quad \begin{cases} \text{Re} \rightarrow 0 \\ \text{Im} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \omega > 0 \quad \begin{cases} 0 < \text{Re} < 9 \\ \text{Im} < 0 \end{cases}$$

intersezione con l'asse reale

$$\operatorname{Im}(w) = 0 \iff -4w \left[\frac{11}{10} + \frac{w^2}{5} \right] = 0 \iff w = 0$$

unica soluzione
accettabile

per w finita
l'unica intersezione con l'asse reale
si ha per $w = 0$

intersezione con asse immaginario

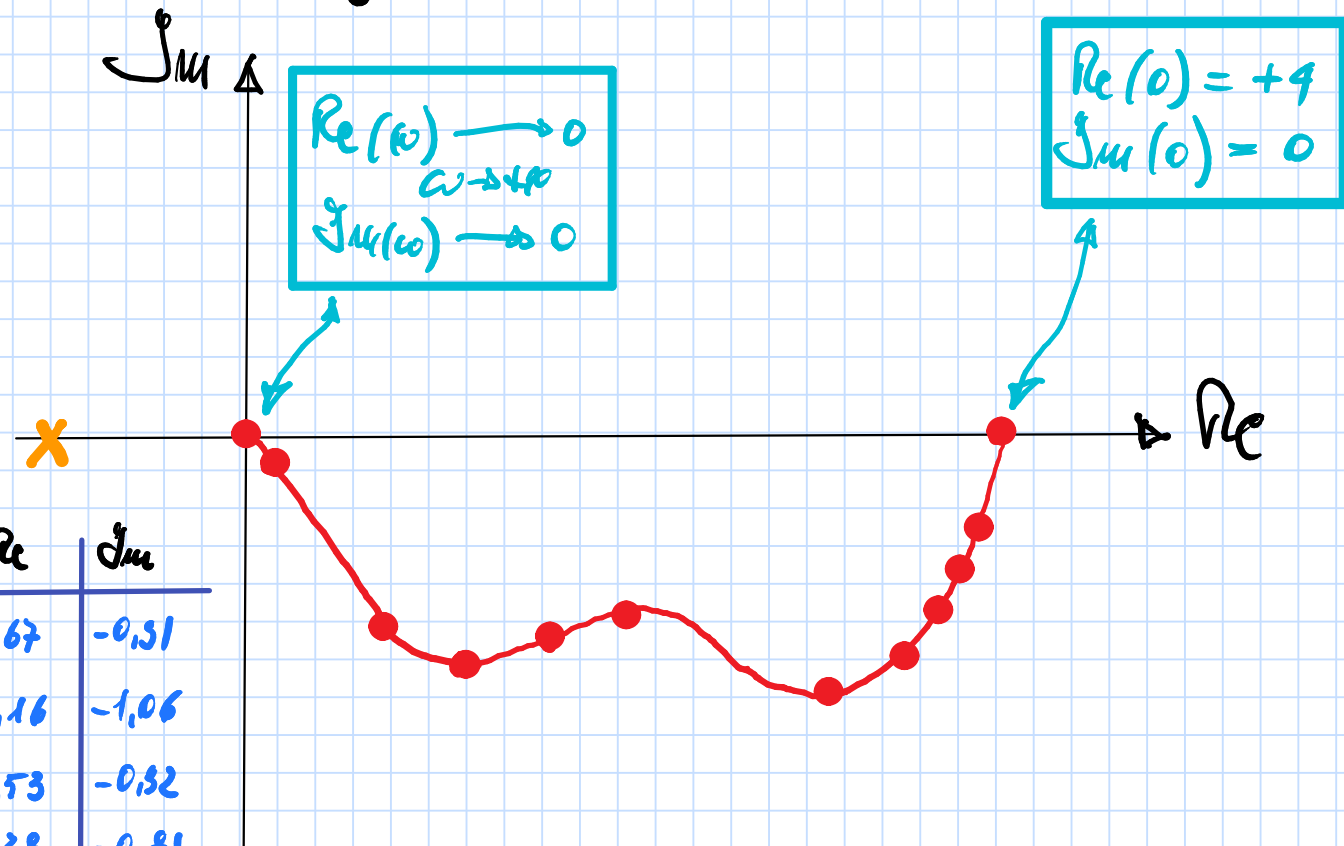
$$\operatorname{Re} = 0 \iff 1 + \frac{19}{10} w^2 = 0 \iff \text{nessuna soluzione accettabile}$$

per w finita ($w \geq 0$) non
ci sono intersezioni con
l'asse immaginario

NB il comportamento per $w \rightarrow \pm\infty$ non può comparire come intersezione
con gli assi

diagramma polare, di Nyquist ed applicazione del criterio di Nyquist

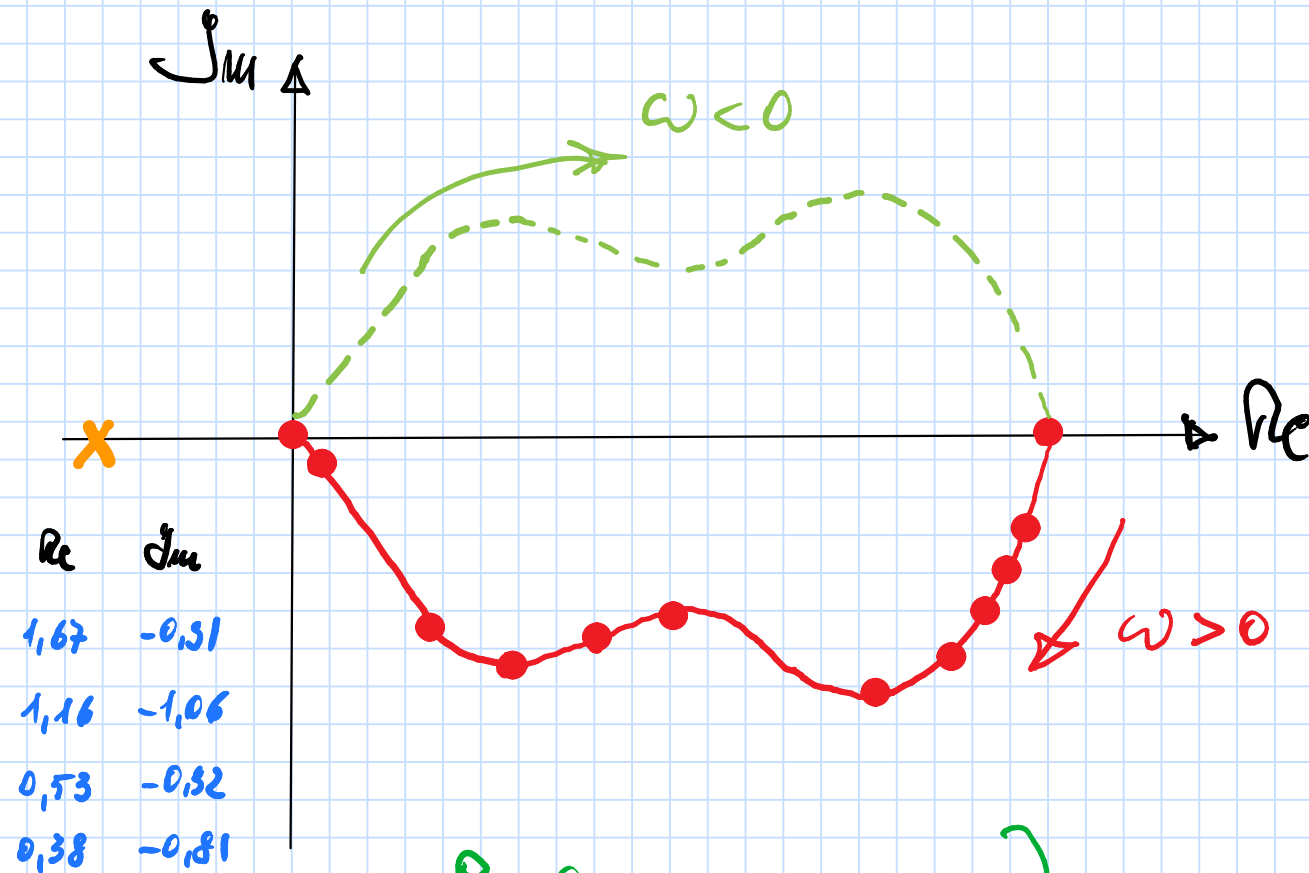
Sulla base di quanto determinato finora:



Calcolo alcuni valori

ω	Re	Im	ω	Re	Im
0,00	4,00	0,00	4,00	1,67	-0,51
0,10	3,92	-0,42	8,00	1,16	-1,06
0,15	3,83	-0,61	16,00	0,53	-0,52
0,20	3,71	-0,76	20,00	0,38	-0,81
0,30	3,49	-0,99	2000	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$-5,38 \cdot 10^{-2}$
0,40	3,18	-1,10			
2,00	1,95	-0,86			

Il diagramma di Nyquist e'



$$P=0$$

il diagramma NW
circonda il punto $-1+j0$

il sistema
e' asintoticamente
stabile e ciclo chiuso

