

Controllo Digitale

Campionamento ed informazione:

teorema del campionamento e filtraggio anti-aliasing

Progetto di regolatori a segnali campionati:

**tecniche approssimate: ~~formula di~~
~~“Eulero implicito”~~ e formula di Tustin**

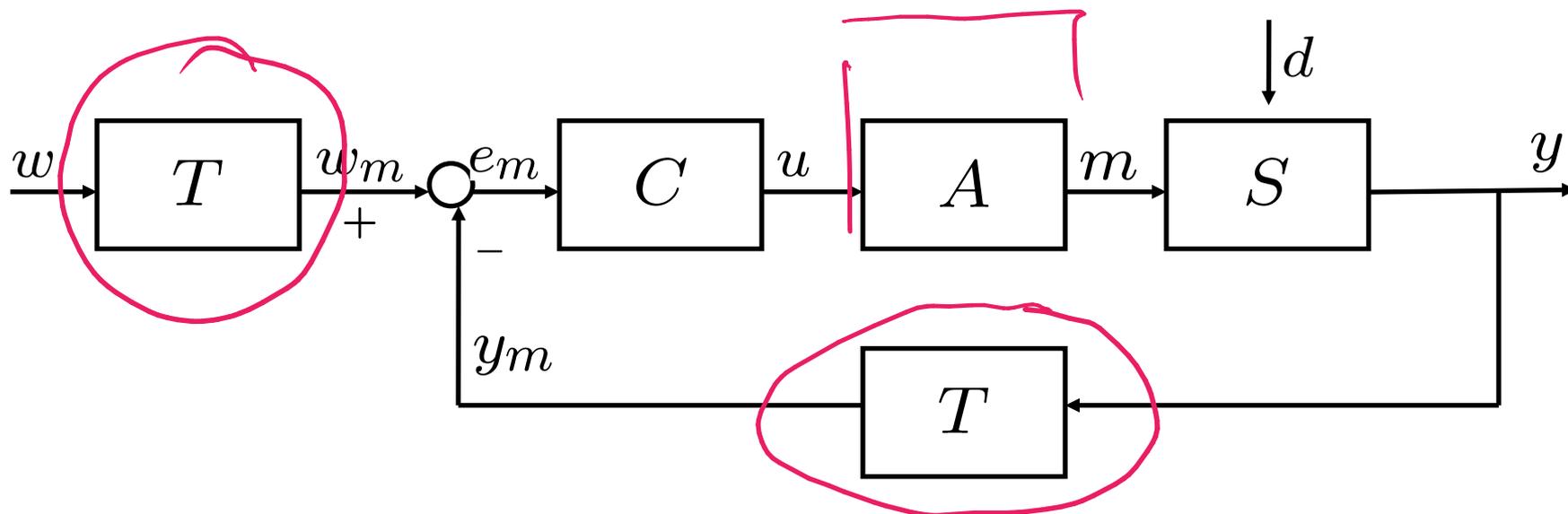
Motivazioni

I sistemi di controllo digitale hanno alcuni vantaggi rispetto ai sistemi di controllo a tempo continuo:

- Flessibilità del SW rispetto all' HW
- Compatibilità rispetto alla strumentazione
- Integrazione di funzioni
- Costi

Controllo a tempo continuo (analogico)

In evidenza i vari componenti del sistema:
trasduttori di misura T , attuatore A , sistema controllato S , controllore C



Tutti i segnali sono segnali a tempo continuo.

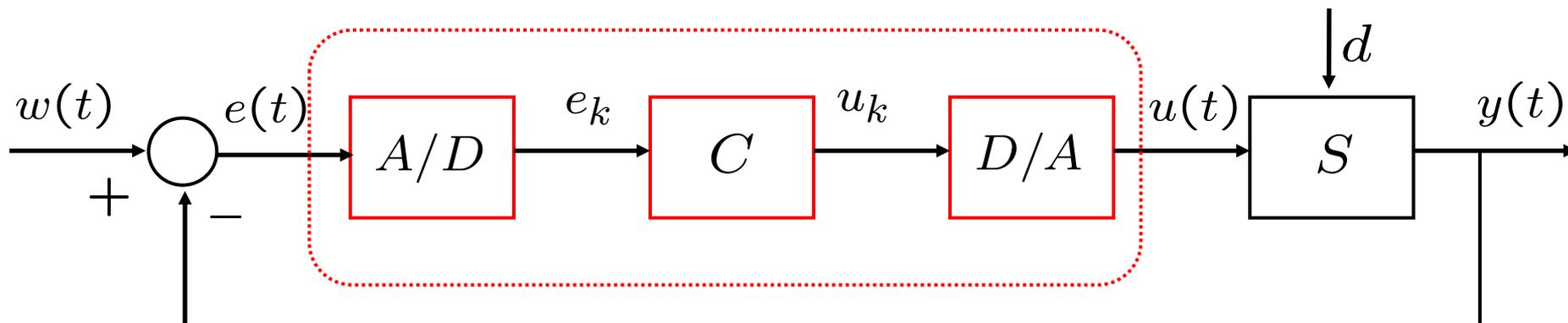
Controllo digitale

- Il controllore analogico viene sostituito con un' **apparecchiatura digitale** (un μC , una scheda DSP, un elaboratore elettronico ecc.).
- Tale dispositivo può elaborare soltanto segnali digitali, quindi ha bisogno di interfacce opportune da e verso il processo da controllare:
 - **Convertitori analogico—digitali** (A/D)
 - **Convertitori digitale—analogici** (D/A)

- Il necessario **sincronismo** tra i convertitori e l'unità di controllo digitale viene garantito da un opportuno **segnale di clock** di periodo T_S (chiamato **periodo di campionamento**).
- L'unità di controllo acquisisce i segnali d'ingresso dagli A/D e fornisce i segnali d'uscita ai D/A soltanto in corrispondenza degli istanti di clock.
- Questi segnali allora sono definiti in istanti di tempo discreti, multipli del periodo di clock T_S .
- Segnali con questa caratteristica vengono detti **segnali a tempo discreto**.

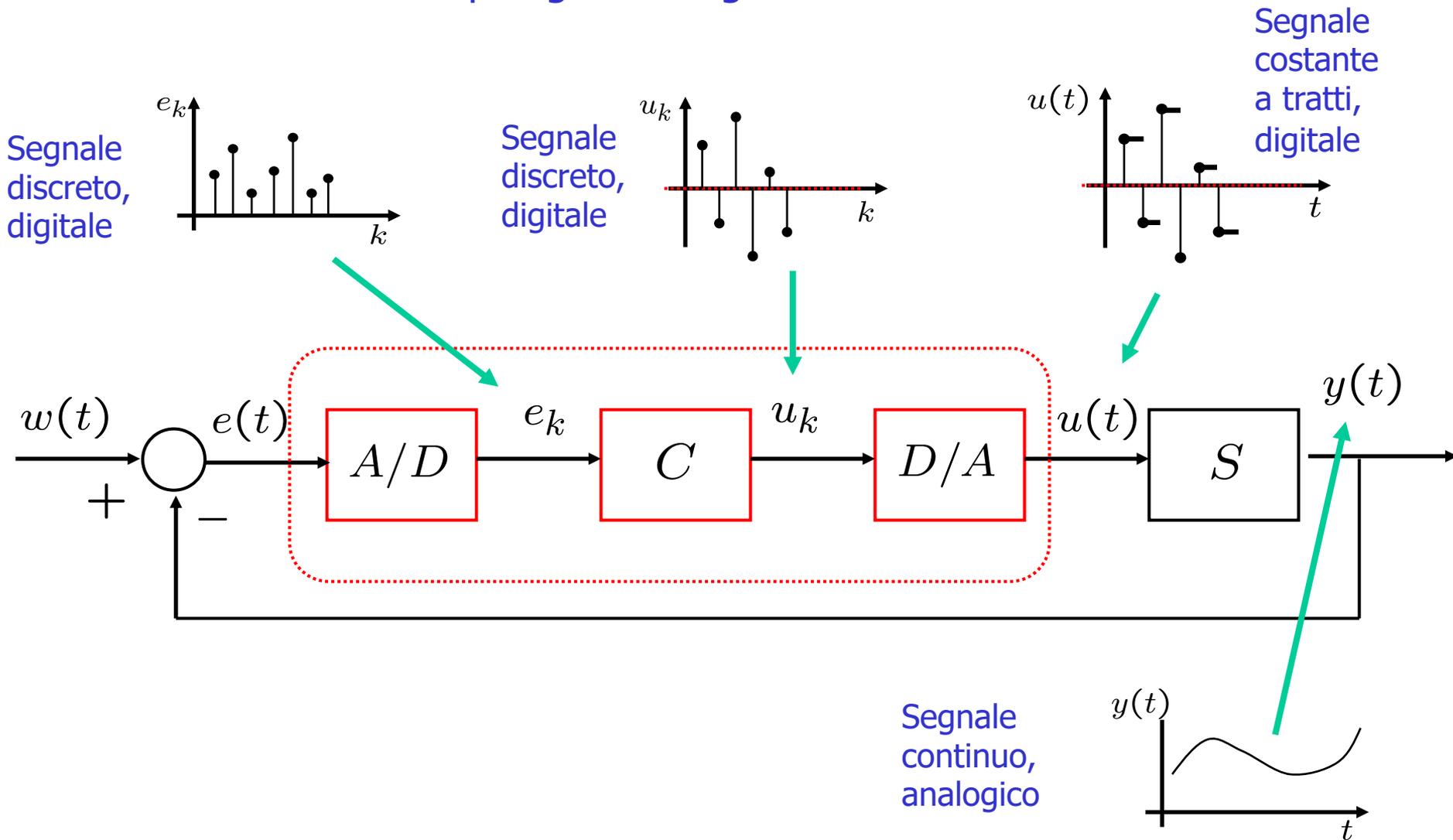
Riassumendo

I sistemi di controllo digitale sono tipicamente strutturati così:



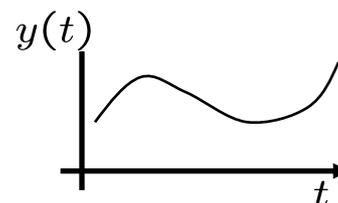
Si tratta di **sistemi ibridi** in cui convivono dinamiche a tempo continuo ed a tempo discreto.

- Evidenziamo le tipologie dei segnali coinvolti



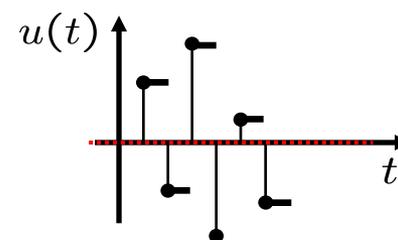
Definizioni

- segnali continui nel tempo

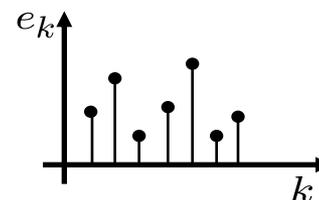


- segnali costanti a tratti, cioè costanti in ogni intervallo $[i \Delta, (i+1) \Delta]$

con Δ periodo di campionamento

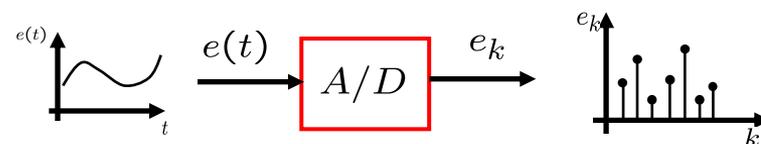


- segnali discreti nel tempo



- segnali analogici: le loro ampiezze possono variare con continuità
- segnali digitali: le loro ampiezze sono quantizzate

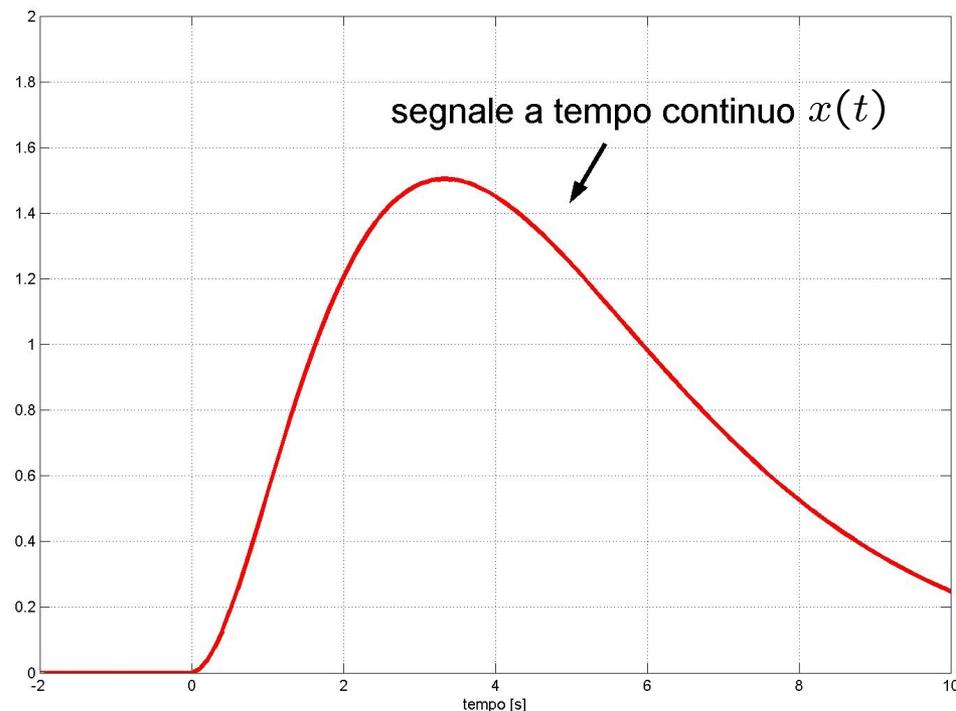
Conversione A/D



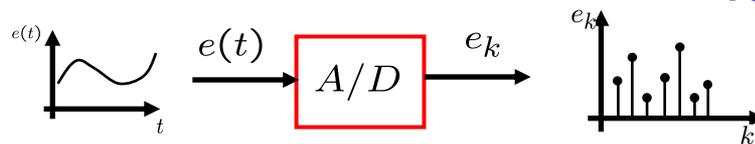
Consideriamo un segnale $x(t)$ a tempo continuo, continuo a tratti, limitato e identicamente nullo per tempi negativi.

Al segnale applichiamo un campionamento periodico.

Che cosa significa?



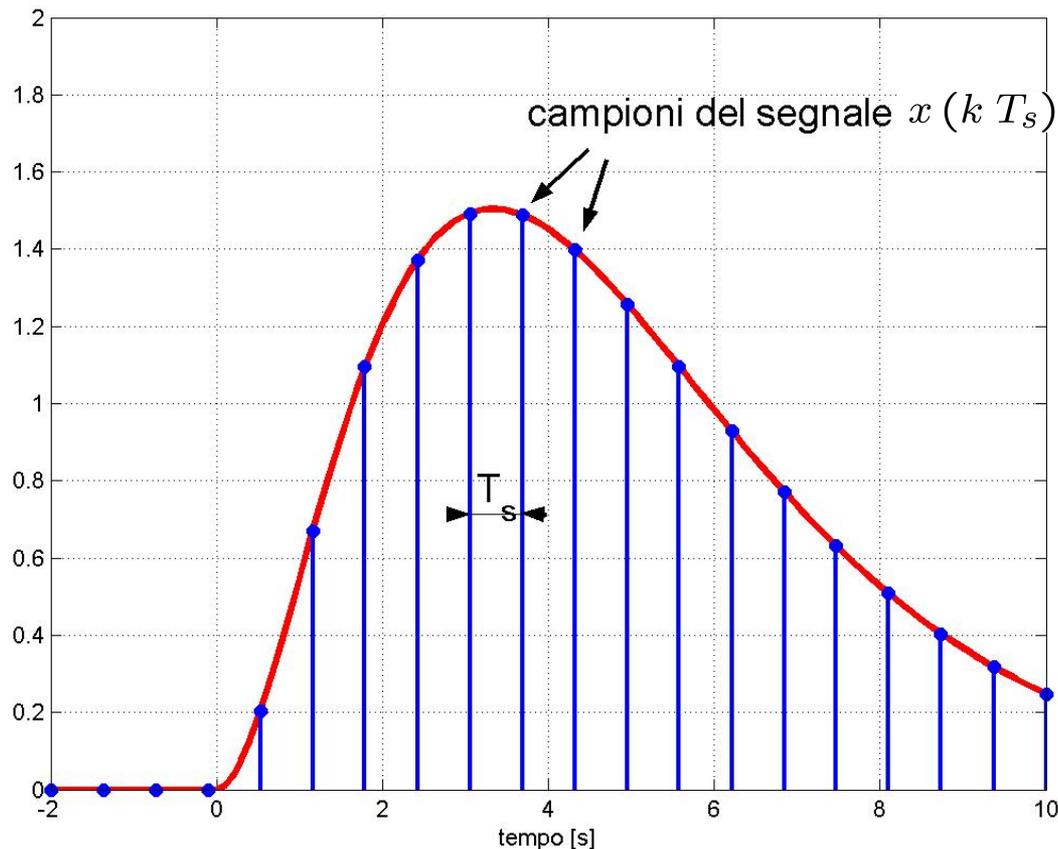
Si estraggono dal segnale i valori assunti in corrispondenza di una successione di **istanti di tempo** multipli interi di un intervallo di tempo fissato, chiamato **periodo di campionamento**, T_s



Di conseguenza si definiscono:

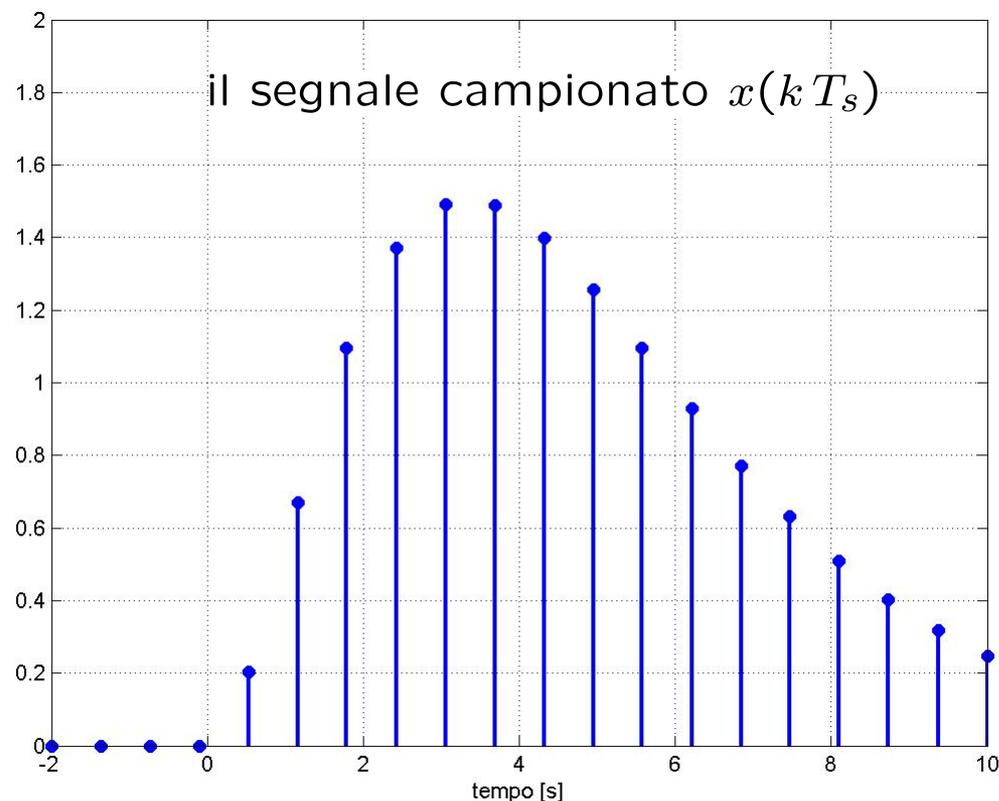
$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ pulsazione di campionamento

$f_s = \frac{1}{T_s}$ frequenza di campionamento



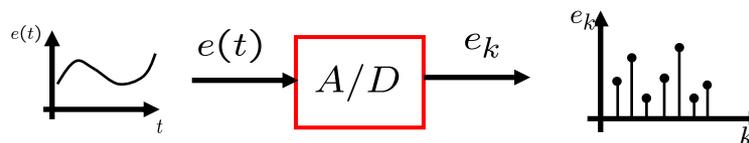
$$\{t = kT_s \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

- Si ottiene una **sequenza di valori numerici** (valori assunti dal segnale a tempo continuo $x(t)$ in corrispondenza della successione di istanti di tempo $\{kT_s\}_{k=0,1,2,\dots}$)
- Si ottiene ancora un **segnale, definito soltanto negli istanti discreti di tempo** considerati.



$$x_k \longrightarrow \{x(t), \quad t = kT_s \quad k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Osservazioni



Nell'operazione A/D ovviamente si perde qualcosa:

- **Perdita di informazione** (ne parliamo più avanti)
- **Codifica digitale** (quantizzazione, distorsioni non lineari)

$$e(t) \rightsquigarrow e_k = e(kT_s) \rightsquigarrow 011010\dots$$

Non affrontiamo questa problematica!

- **Non ci interessa come siano realizzati i dispositivi di conversione A/D.**

- Il convertitore A/D “semplificato” si rappresenta come un “**campionatore impulsivo**” o “**campionatore istantaneo**”

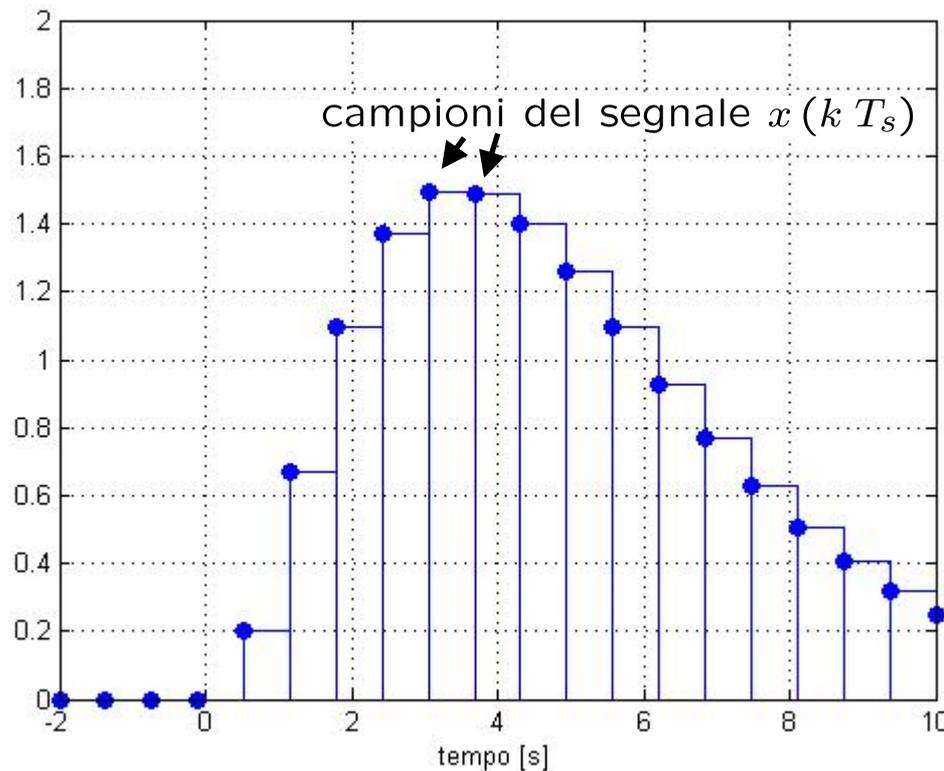


$$e(t) \rightsquigarrow e_k = e(k T_s)$$

Conversione D/A (ZOH tenuta di ordine 0)

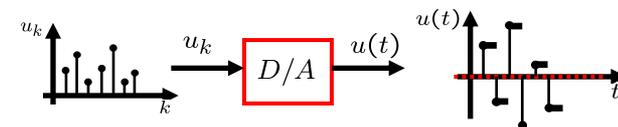
$$x(t) = x_k, \quad kT_H \leq t < (k + 1)T_H$$

Tra l'istante kT_H ed il successivo $(k + 1)T_H$ il **segnale** $x(t)$ in uscita viene mantenuto **costante**, di valore pari a quello del campione x_k della sequenza a tempo discreto in ingresso al convertitore.



T_H : periodo di mantenimento

Osservazioni



- Se con T_H indichiamo il periodo di mantenimento, si definiscono allora

- **Frequenza di mantenimento**

$$f_m = \frac{1}{T_H}$$

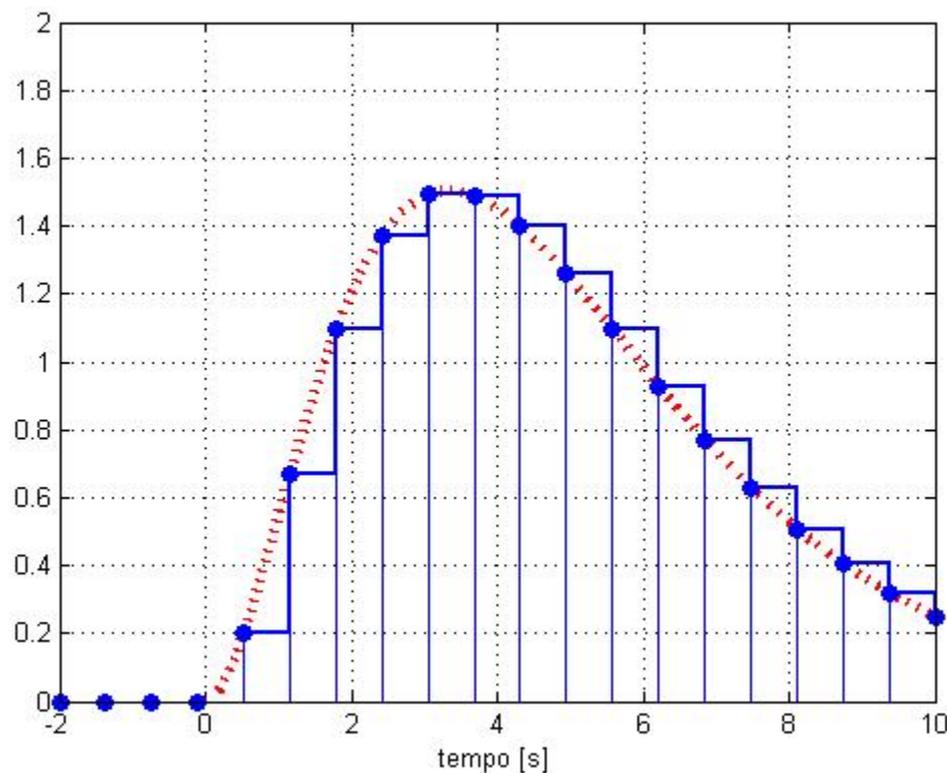
- **Pulsazione di mantenimento**

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_H}$$

- Anche stavolta trascuriamo i problemi dovuti alla codifica digitale (il segnale reale in ingresso al DAC è digitale, quindi quantizzato).
- Di solito il periodo di campionamento T_s e quello di mantenimento T_H hanno la stessa durata.

Osservazioni finali su A/D e D/A

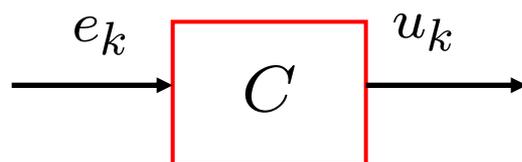
- Anche considerando assente la distorsione da quantizzazione, le operazioni di conversione A/D e D/A non sono una l'inversa dell'altra!
- Applicando l'uscita di un "campionatore impulsivo" all'ingresso di uno ZOH, all'uscita dello ZOH non si ottiene il segnale a tempo continuo di partenza!



L'uscita dello ZOH è una “gradinata” che approssima il segnale, in ritardo.

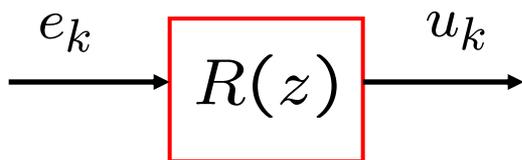
Controllore

Il controllore è un sistema a tempo discreto ovvero è di fatto **un algoritmo di calcolo** (in ciò risiede in effetti la potenzialità del controllo digitale).

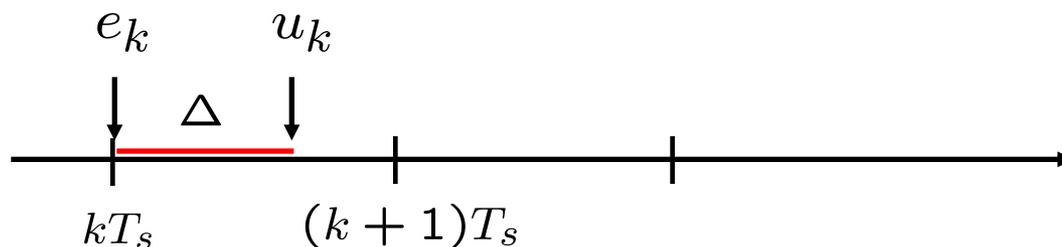


$$u_k = f(u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, e_k, e_{k-1}, \dots)$$

La **Z—trasformata** permette di utilizzare un formalismo algebrico analogo a quello a tempo continuo:



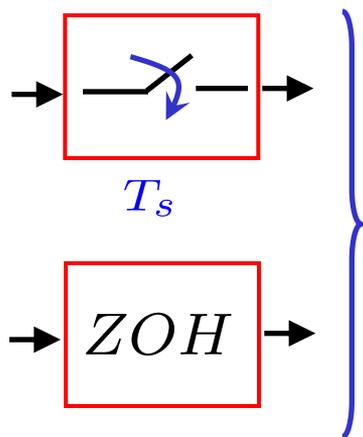
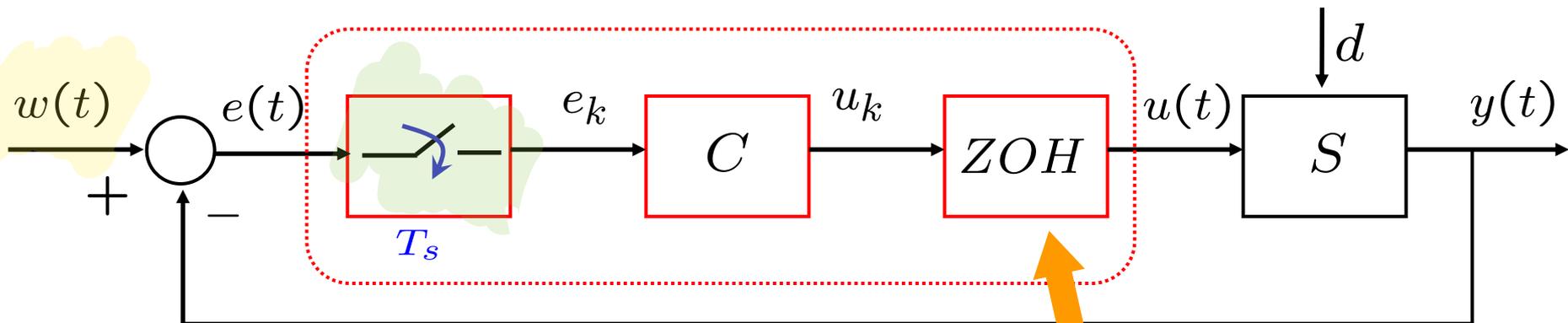
Temporizzazione



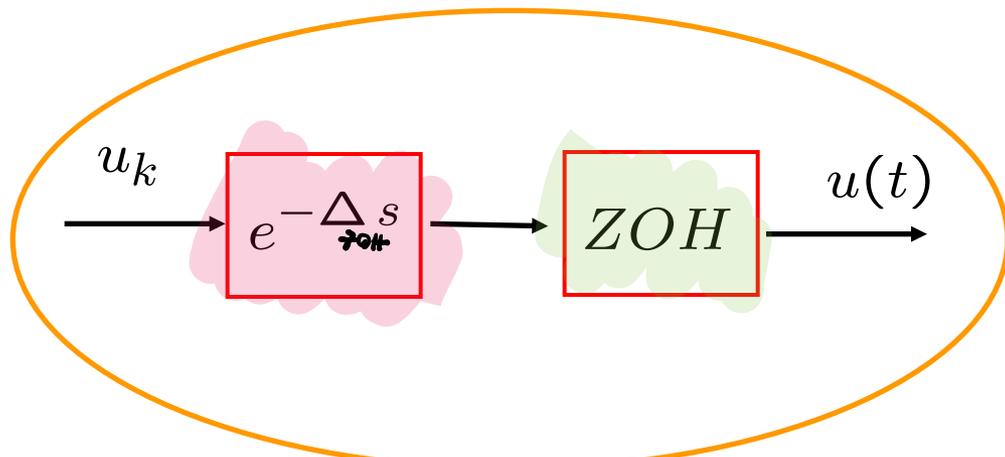
Evidentemente il tempo di elaborazione necessario per calcolare il campione della sequenza di controllo deve essere inferiore al periodo di campionamento:

$$\Delta < T_s$$

Riassumendo: schema equivalente



Elementi
base



- In tutto ciò che segue assumeremo nullo l'intervallo di tempo Δ necessario all'elaborazione della legge di controllo (in pratica lo assumiamo trascurabile rispetto alla durata del periodo di campionamento).

$$\Delta = 0$$

Idealmente

$$\Delta \ll T_s$$

Praticamente

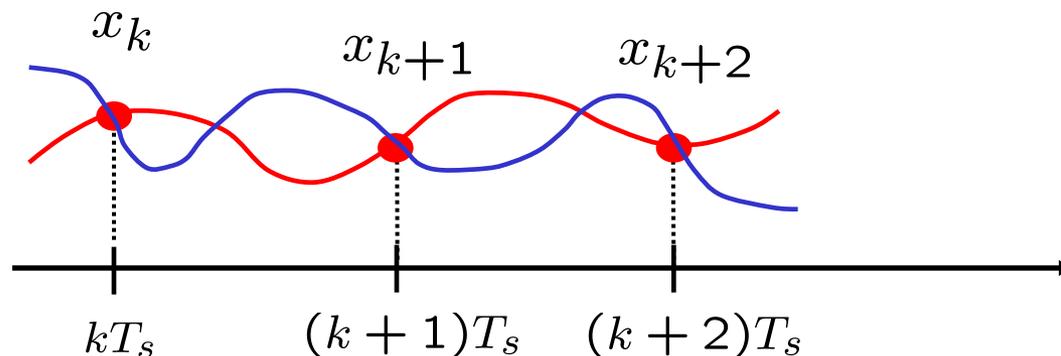
Campionamento ed informazione

Il problema dell' aliasing: cenni

Il teorema fondamentale del campionamento

Scelta del periodo di campionamento

Campionamento e informazione



In generale il **problema di ricostruire** la funzione continua a partire dai campioni è **mal posto** nel senso che tale ricostruzione non è univoca.

$$\left. \begin{array}{l} x_k, k = 0, 1, 2, \dots \\ + \\ \text{Informazione a priori su } x(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} ? \\ \longrightarrow \end{array} x(t)$$

Effetti di distorsione per campionamento non corretto



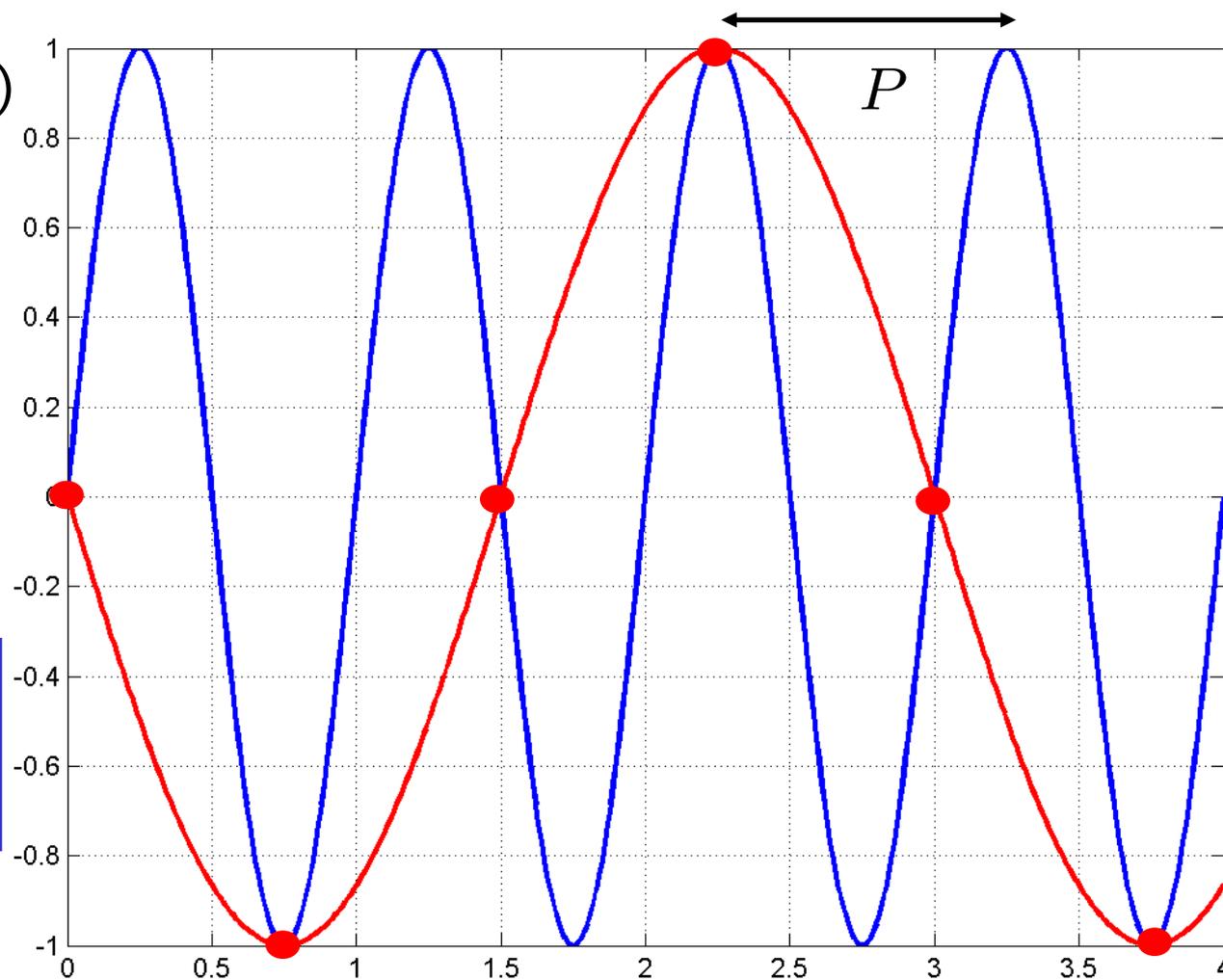
Campionamento di un segnale sinusoidale

$$x(t) = \sin(\bar{\omega}t)$$

$$P = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$$

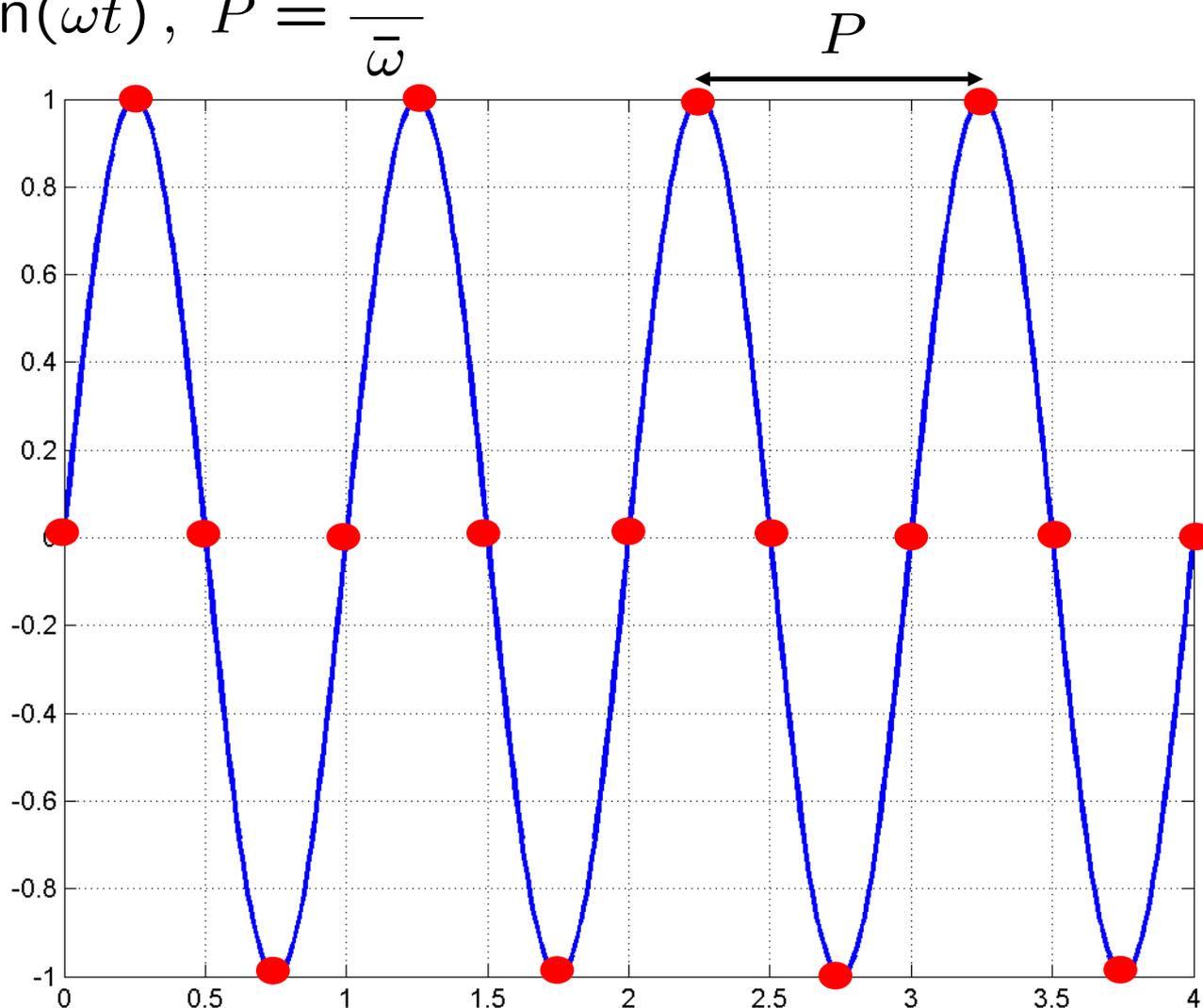
$$T_s = \frac{3}{4}P = \frac{3\pi}{2\bar{\omega}}$$

Aliasing
o equivocazione



Esistono sinusoidi con periodo $\bar{P} > P$ che producono gli stessi campioni

$$x(t) = \sin(\bar{\omega}t), \quad P = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$$



$$T_s = \frac{1}{4}P = \frac{\pi}{2\bar{\omega}}$$

no aliasing

Non esistono sinusoidi con periodo $\bar{P} > P$ che producono gli stessi campioni

Riassumendo: segnali sinusoidali

- Supponiamo di voler sottoporre a campionamento un segnale sinusoidale

$$x(t) = X \sin(\omega t)$$

- Informazione **a priori** sulla pulsazione del segnale

$$\omega < \bar{\omega} \iff P > \bar{P} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$$

- Scelta del campionamento

$$T_s < \frac{\bar{P}}{2} \iff \omega_s > 2\bar{\omega}$$

- Risultato: **ricostruzione univoca** del segnale $x(t)$ a partire dai campioni $x_k = x(kT_s)$

Segnali a banda limitata

- Esiste un risultato valido in generale? Ricordiamo che si definiscono **segnali a banda limitata**

$$- \quad x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \boxed{\omega_i \leq \bar{\omega} \quad \forall i}$$

$$- \quad x(t) = \int_0^{\bar{\omega}} \alpha(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

banda del segnale

$$\boxed{\omega \in [0, \bar{\omega}]}$$

Teorema del campionamento

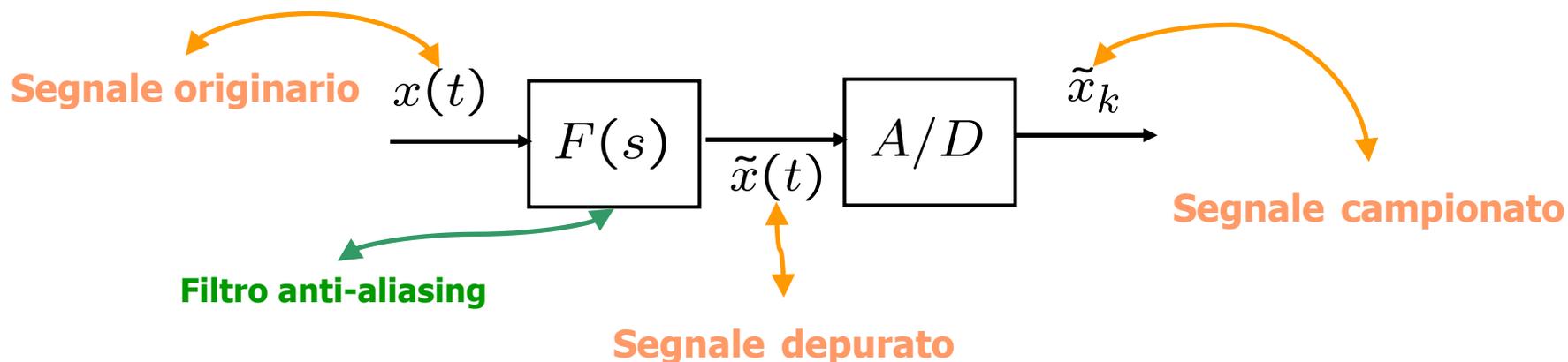
Teorema di Shannon

In generale, se il segnale a tempo continuo $x(t)$ è a banda limitata $B = [0, \bar{\omega}]$ e

se $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\bar{\omega}$  $x(t)$ è ricostruibile univocamente a partire dai campioni $x_k, k = 0, 1, 2, \dots$

Teorema fondamentale del campionamento

Come si campiona un segnale? Filtraggio antialiasing



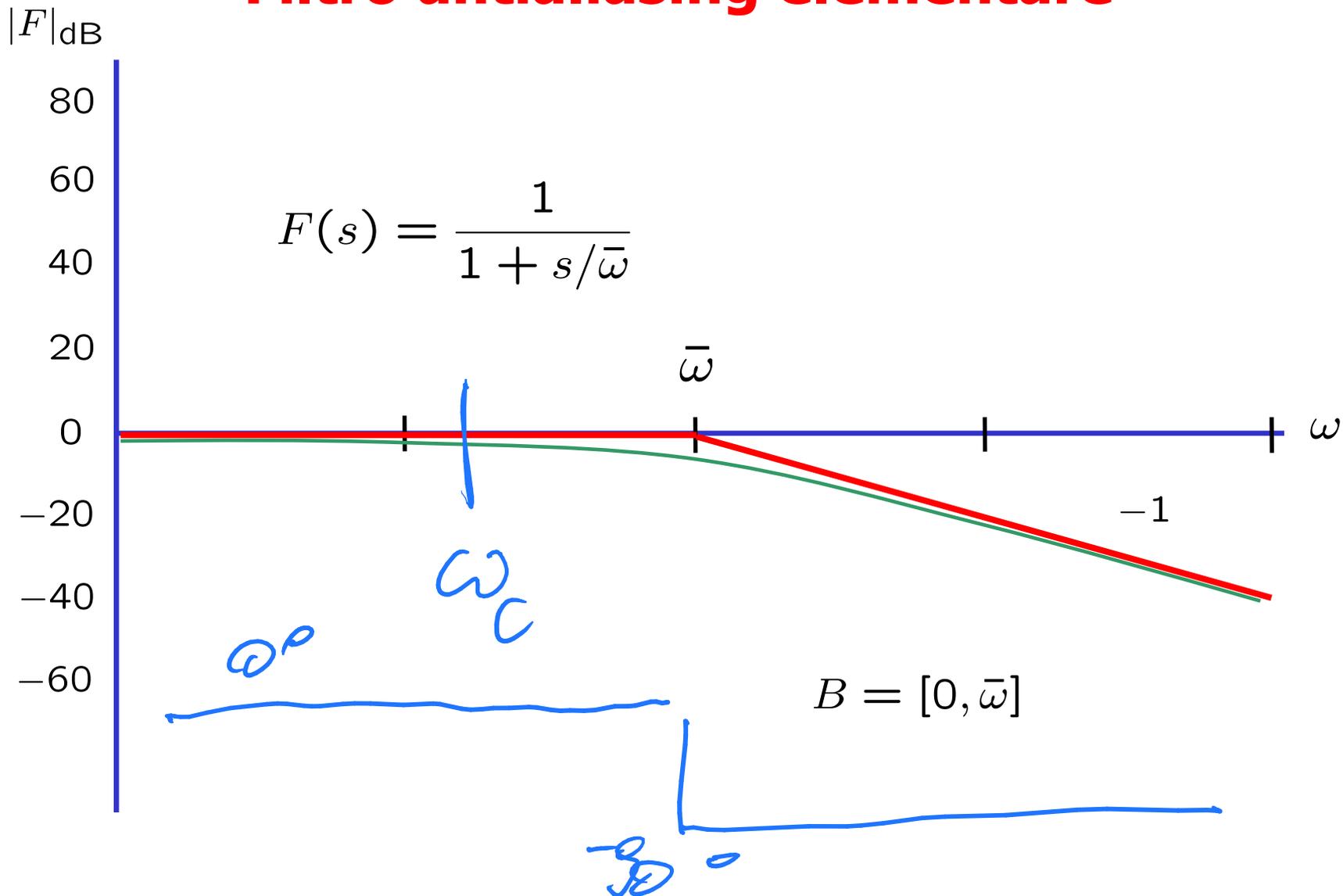
- L'informazione utile di $x(t)$ è confinata in $B = [0, \bar{\omega}]$
- $F(s)$ filtro passa-basso con banda passante $B = [0, \bar{\omega}]$

Per esempio:
$$F(s) = \frac{1}{1 + s/\bar{\omega}}$$

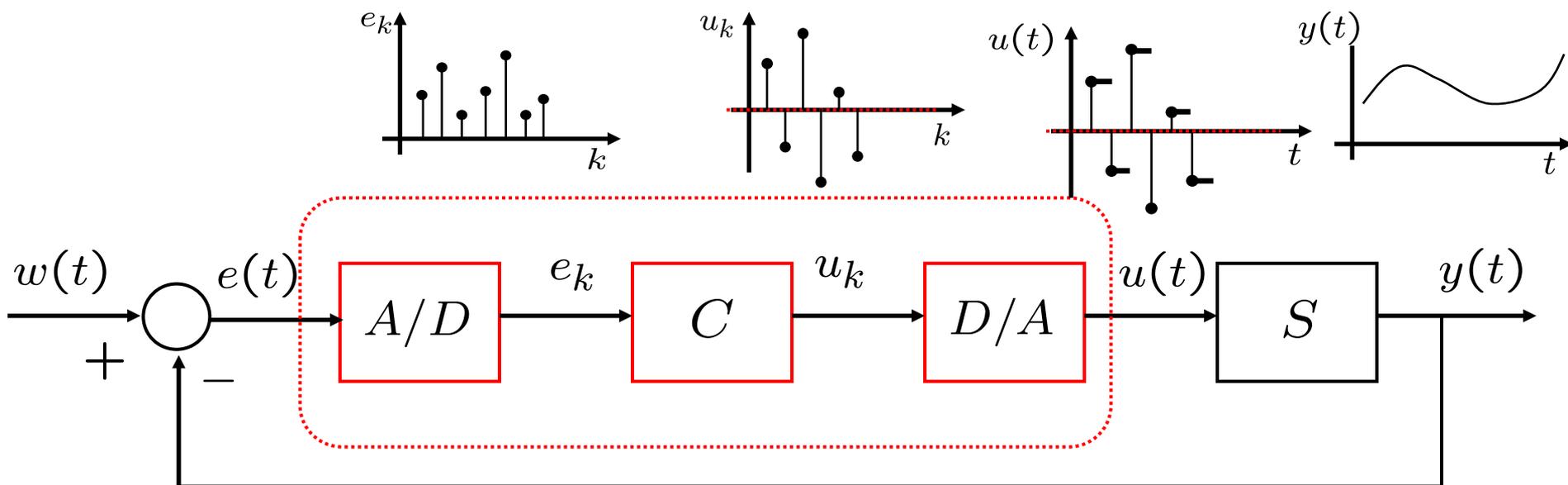
- Pulsazione di campionamento

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\bar{\omega}$$

Filtro antialiasing elementare



Progetto di un controllore digitale



- Scelta di T_s
- Progetto di $R(z)$ (il controllore si ridurrà ad algoritmo di calcolo)



Trasformate Z

Scelta di T_s basata sulla banda

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} > 2\bar{\omega}$$

- Costi  ω_s bassa
- Informazione: l'informazione utile nel segnale $e(t)$ è confinata in $B_c = [0, \bar{\omega}_c]$ (la pulsazione critica e' importante)



$$\omega_s > 2\bar{\omega}_c$$

Regola empirica:

$$\alpha\bar{\omega}_c < \omega_s < 10\alpha\bar{\omega}_c$$

$$\frac{2\pi}{10\alpha\bar{\omega}_c} < T_s < \frac{2\pi}{\alpha\bar{\omega}_c} \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

Scelta di T_s basata sul numero di campioni nel transitorio

- Caso (tipico): sistema di controllo con 2 poli dominanti, con coefficiente di smorzamento pari a $\bar{\xi}$ e pulsazione naturale $\bar{\omega}_n$
- L' intervallo di **tempo d' assestamento al 1%** è approssimativamente pari a

$$T_{a\ 1\%} = \frac{5}{\bar{\xi} \bar{\omega}_n}$$

- Scegliere di avere **tra α e 10α campioni** nell' intervallo di tempo dato dal **tempo di assestamento al 1%** significa che

$$\frac{T_{a\ 1\%}}{10\alpha} \leq T_s \leq \frac{T_{a\ 1\%}}{\alpha} \qquad 5 \leq \alpha \leq 10$$

Scelta del controllore $R(z)$

- Discretizzazione di un controllore progettato a tempo continuo
- Tecniche dirette di progetto a tempo discreto
- Daremo soltanto alcuni **brevi cenni** al **primo approccio** ...

Considerazioni

- Le **prestazioni** del sistema **dipendono** anche dalla **scelta** del periodo di **campionamento**! [cfr. FA Parte 1 – slide #63-69, FA Parte 11 – slide #65 e segg.]
- La **stabilità** del sistema deve venire analizzata con **criteri diversi** da quelli utilizzati nel caso di sistemi di controllo a tempo continuo [cfr. FA Parte 3 – slide #72-144].
- Il passaggio da controllore a tempo continuo a controllore digitale non è per nulla indolore, anzi va fatto con accortezza! [cfr. FA Parte 11 – slide #57 e segg.]

Progetto del controllore

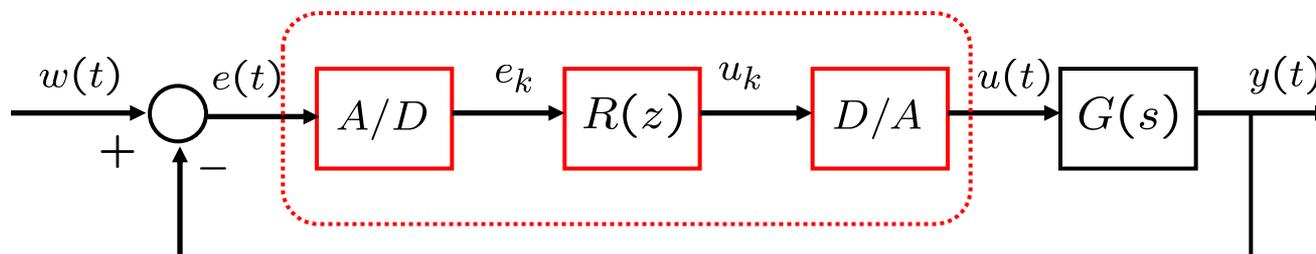
Sistemi a segnali campionati

Progetto per approssimazione

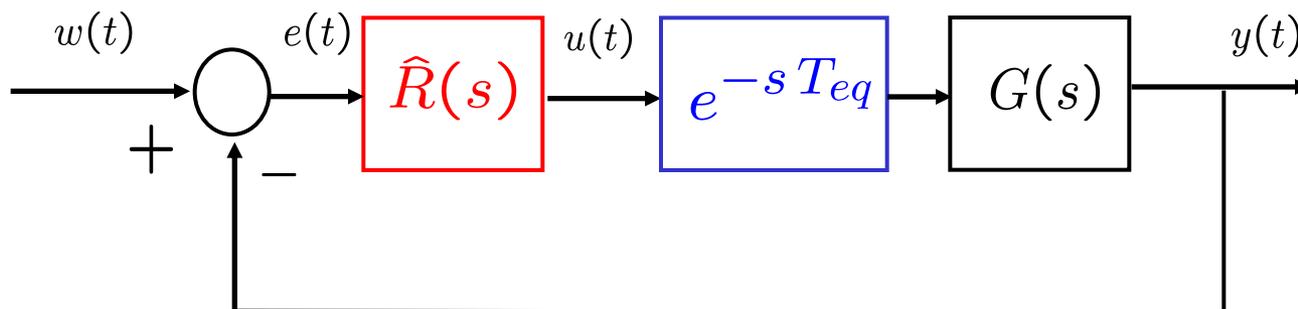
Progetto di un controllore a segnali campionati

- **Sintesi a tempo continuo** ed **implementazione a tempo discreto**: si dimensiona il regolatore basandosi su modelli a tempo continuo del sistema usando le tecniche classiche e poi si realizza in modo “approssimato” il regolatore nella forma a segnali campionati.
- Quale **strategia** si segue per il progetto preliminare a tempo continuo?
- Quali sono le **condizioni di applicabilità** di questa metodologia?

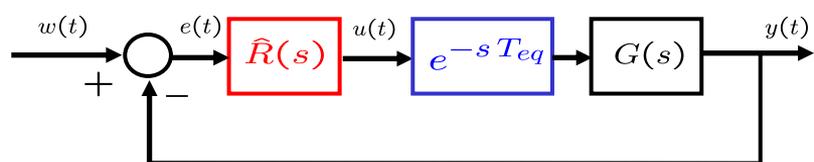
- Vogliamo **progettare** il sistema di controllo seguente, a **segnali campionati**



- **Trasformiamo** il problema in un altro problema di **progetto totalmente a tempo continuo**, equivalente, almeno in prima approssimazione, al problema originario



- Si può mostrare che per le tecniche che studieremo si ha:



$$e^{-s T_{eq}} = e^{-s \frac{T_s}{2}}$$

- Risolto il problema a tempo continuo, il controllore a segnali campionati viene determinato applicando una opportuna sostituzione di variabile

$$\hat{R}(s) \quad \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \uparrow \\ \text{---} \end{array} \quad R(z)$$

$$s = \frac{n(z)}{d(z)}$$

Tecniche di progetto per discretizzazione

Metodi di ~~Eulero~~ “all’ indietro”, di Tustin

Formule di discretizzazione: linee guida

- Vedremo soltanto una **tecnica** elementare, con **periodo di campionamento fisso**.
- Anche se quella che descriveremo non sarà una tecnica complessa (o anche per questo motivo), è quella **più utilizzata nella pratica**.

$$G(s) = \frac{1+s}{s(1+2s)}$$

$$G_{TU}(z) = \frac{1 + \frac{z-1}{z+1}}{\left(\frac{z-1}{z+1} \right) \left(1 + \frac{2(z-1)}{z+1} \right)}$$

$$S = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1} = \frac{z-1}{z+1}$$

$$T_s = 2$$

$$= \frac{z+1+z-1}{z+1} = \frac{(z-1)[z+1+2z-2]}{(z+1)^2}$$

$$G_{10}(z) = \frac{2z}{z+1} \cdot \frac{(z+1)^{\cancel{1}}}{(z-1)(3z-1)}$$

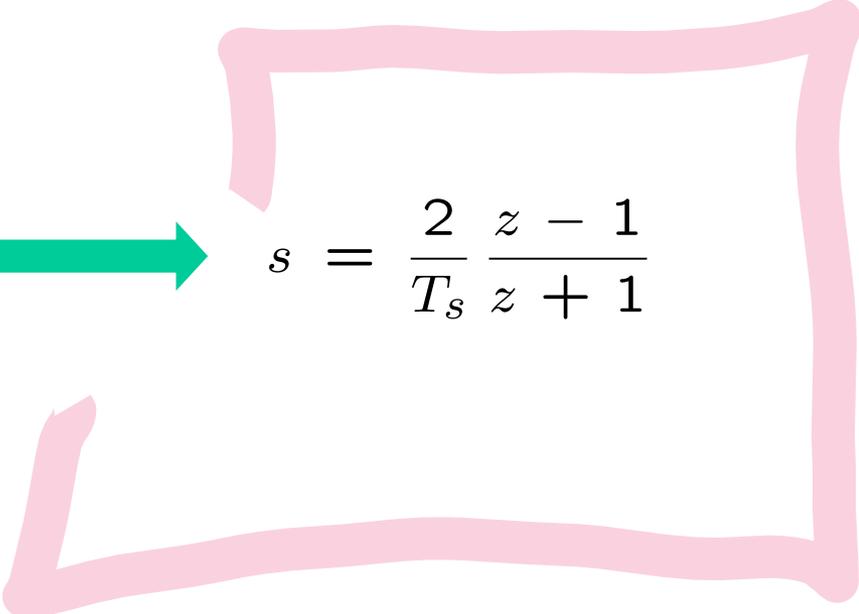
$$= \frac{2z (z+1)}{(z-1)(3z-1)}$$

Formule di discretizzazione

- formula BE $\longleftrightarrow s = \frac{z - 1}{T_s z}$



- formula TU $\longleftrightarrow s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$



Importante proprietà

- Le trasformazioni presentate garantiscono che se la FdT originaria del **regolatore a tempo continuo $R(s)$** è razionale a coefficienti costanti [$R(s)$ è **sistema LTI**] allora
 - la FdT del regolatore a segnali campionati **$R(z)$** è anch'essa **razionale** (a coefficienti costanti);
 - il regolatore **$R(z)$** è quindi anch'esso un **sistema dinamico lineare e stazionario**.

Proprietà delle trasformazioni: conservazione della stabilità

- Come sono collocati zeri e poli del regolatore a segnali campionati $R(z)$ ottenuto applicando la formula ~~BE~~ o TU, rispetto alla collocazione di zeri e poli del regolatore originario a tempo continuo $R(s)$?
- Partendo da un regolatore a tempo continuo $R(s)$ ed applicando le formule viste si ottengono regolatori a segnali campionati differenti, con configurazioni di zeri/poli differenti.
- **Le formule ~~BE~~=TU trasformano regolatori $R(s)$ stabili in regolatori $R(z)$ anch' essi stabili?**

Corrispondenza “s” ↔ “z”: formula BE

- Si vuole risolvere il problema

$$\{s : s \in \mathbb{C}, \Re(s) < 0\} \longleftrightarrow \{z : z \in \mathbb{C}, ?\}$$

$$s = \frac{z - 1}{T_s z}$$

- Si tratta allora di analizzare la regione

$$\left\{ z : z \in \mathbb{C}, \Re \left(\frac{z - 1}{T_s z} \right) < 0 \right\}$$

- Per trovare la regione del piano “z” descritta dalla relazione appena trovata, conviene porre

$$z = \sigma + j\omega$$

- Si ottiene così

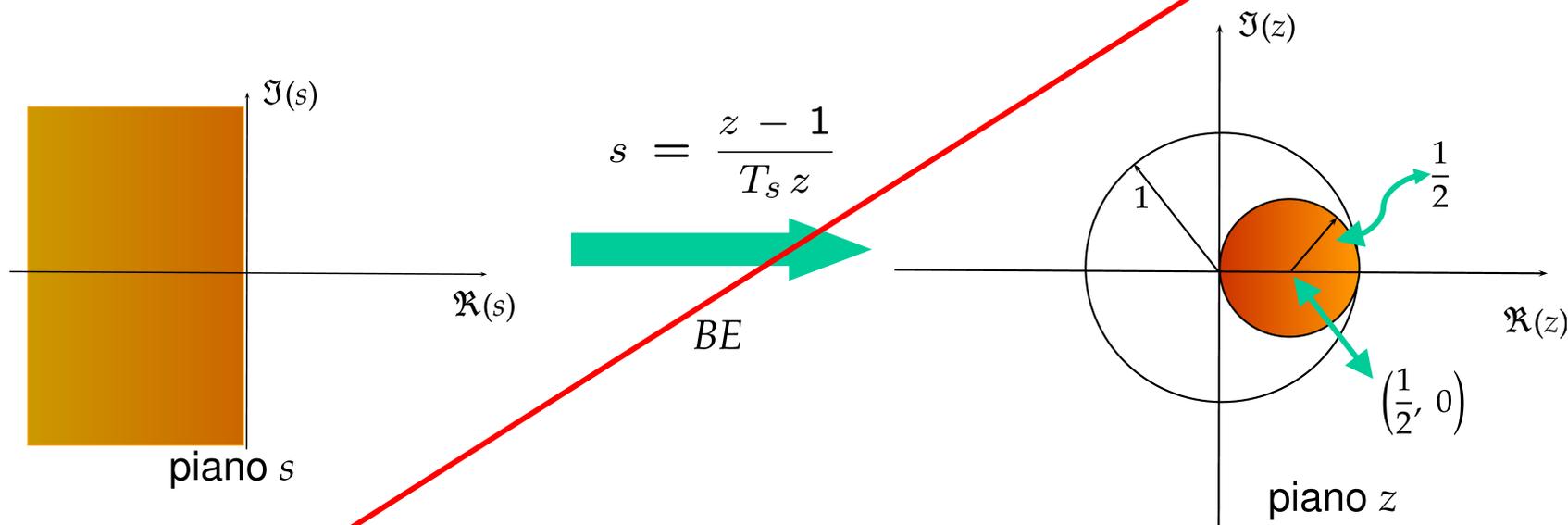
$$\Re \left(\frac{\sigma + j\omega - 1}{T_s (\sigma + j\omega)} \right) < 0$$

$$\frac{\sigma^2 - \sigma + \omega^2}{\sigma^2 + \omega^2} < 0$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2} \right) + \omega^2 < \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)^2 + \omega^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

- La regione che abbiamo determinato è delimitata da una circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centro in $(+\frac{1}{2}, 0)$ nel piano “z”.



- La **trasformazione BE** allora **garantisce la stabilità**: passando da “s” a “z” sicuramente si ottengono “poli stabili” se la FdT di partenza possiede “poli stabili”.

Corrispondenza “s” ↔ “z”: formula TU

- In maniera analoga a quanto fatto finora, si vuole risolvere il problema

$$\{s : s \in \mathbb{C}, \Re(s) < 0\} \longleftrightarrow \{z : z \in \mathbb{C}, ?\}$$

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- Si tratta allora di analizzare la regione

$$\left\{ z : z \in \mathbb{C}, \Re \left(\frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1} \right) < 0 \right\}$$

- Per trovare la regione del piano “z” descritta dalla relazione appena trovata, conviene ancora porre

$$z = \sigma + j\omega$$

- Si ottiene così

$$\Re \left(\frac{2}{T_s} \frac{\sigma - 1 + j\omega}{\sigma + 1 + j\omega} \right) < 0$$

$$\Re \left[\frac{\sigma^2 - 1 + \omega^2 + 2j\omega}{(\sigma + 1)^2 + \omega^2} \right] < 0$$

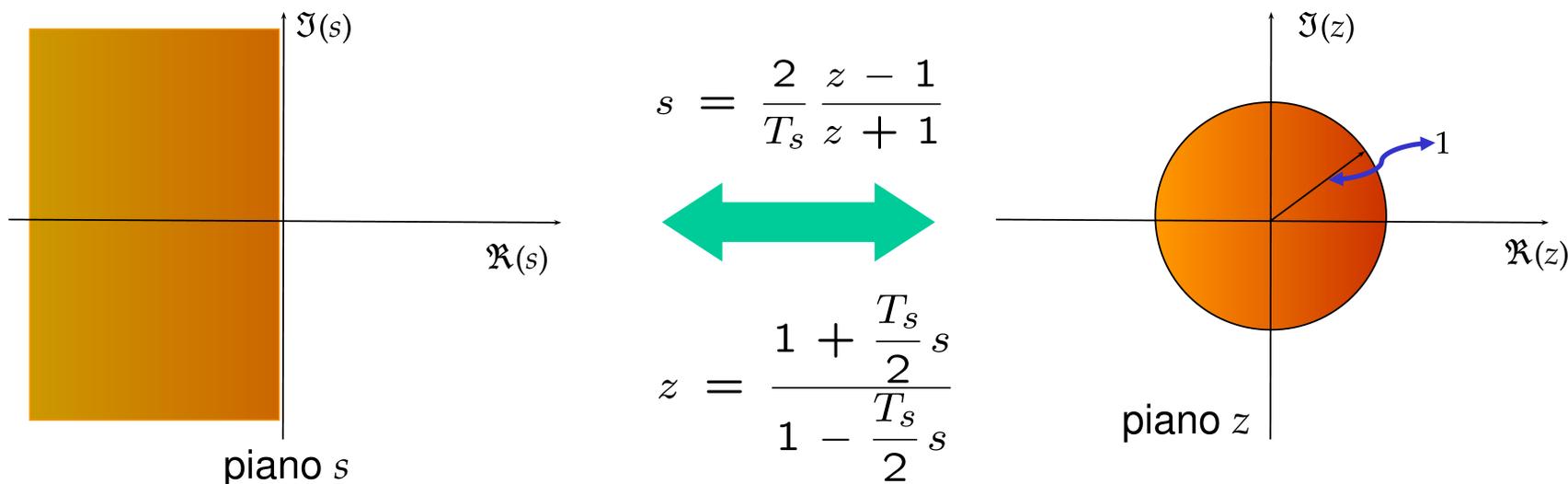
$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$

$$\sigma^2 + \omega^2 < 1$$



- Ma questa è la regione di “stabilità asintotica” per il piano “z”!

- Si vede facilmente che la corrispondenza è biunivoca: l’immagine della “regione di asintotica stabilità” nel piano “s” coincide con la “regione di asintotica stabilità” nel piano “z” e viceversa.



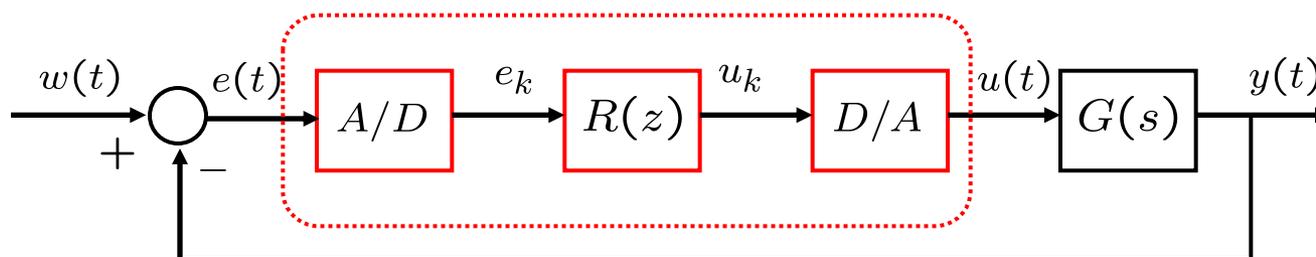
- La **trasformata di Tustin conserva la stabilità.**

Proprietà delle trasformazioni: risposta in frequenza

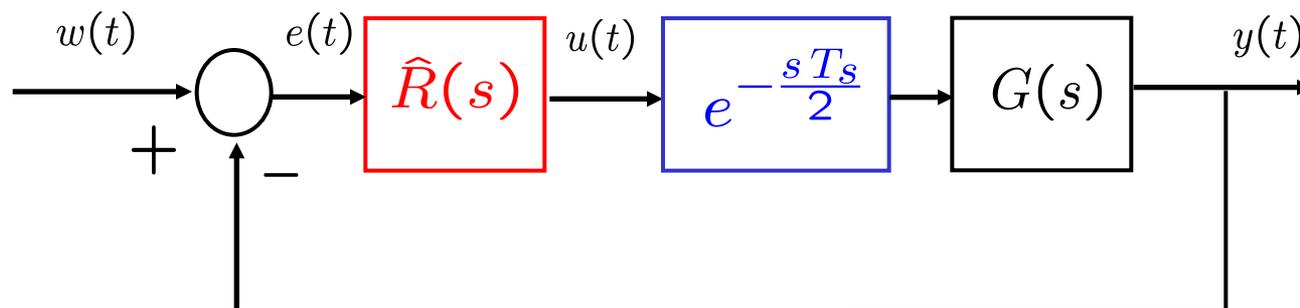
- È possibile garantire in qualche modo prestazioni espresse tramite la risposta in frequenza (es. pulsazione a -3 dB, attenuazione in una banda assegnata, picchi di risonanza ecc.) utilizzando queste tecniche di progetto approssimate?
- In generale **NON si possono soddisfare specifiche sulla risposta in frequenza** (ad es. posizione di picchi di risonanza o di anti-risonanza, estremi della banda passante, di transizione o bloccata) utilizzando le tecniche di progetto approssimate che stiamo analizzando.
- L'errore che si commette sul margine di fase e sulla pulsazione ω_c del sistema è tanto più piccolo quanto maggiore è la pulsazione di campionamento ω_s rispetto alla pulsazione ω_c del sistema.

Ricapitolando: progetto approssimato a segnali campionati

- Per progettare un controllore a segnali campionati



si risolve un problema di progetto “equivalente” totalmente a tempo continuo



- Supponendo assegnate le specifiche di progetto per il controllore originario a segnali campionati, come si assegnano le **specifiche** per il **nuovo problema**?
- Le **specifiche** sulla **banda passante** e sul **marginе di guadagno** rimangono le stesse del problema originario anche se
 - la tecnica di progetto non riesce a rispettare queste specifiche: la perdita di prestazioni è tanto minore quanto minore è il periodo di campionamento (cfr. Parte 11 #57 e segg.).
 - non c'è modo di quantificare (anche solo in maniera approssimata) di quanto degradano le prestazioni.

- Le **specifiche** su **margini di fase** e/o **sovraelongazione** nella risposta allo scalino e/o **smorzamento** dei **poli dominanti** vanno “maggiorate” tenendo conto del termine

$$e^{-\frac{sT_s}{2}}$$

- Infatti, assegnata la specifica sul margine di fase $\bar{\varphi}_m$ e la banda passante $\bar{\omega}_c$
 - per garantire il margine di fase desiderato va compensato *in modo conservativo* il fattore

$$\angle \left[e^{-\frac{sT_s}{2}} \Big|_{s=j\bar{\omega}_c} \right] \rightarrow \delta\varphi = -\frac{\bar{\omega}_c T_s}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

- Il progetto a tempo continuo procede allora come al solito, con l'accortezza di **garantire per il sistema margini di stabilità maggiori di quelli richiesti** [il termine di “ ritardo equivalente” è soltanto una approssimazione ...]

Esempio di progetto di regolatori per discretizzazione

**Progetto
con le formule BE₇ TU**

Esempio

- Consideriamo il processo descritto dalla FdT

$$G(s) = \frac{0.1 (1 - 2s)}{s (1 + 10s) (1 + 0.1s)}$$

- Il regolatore a tempo continuo

$$R(s) = \frac{2 (1 + 10s)}{(1 + 0.1s)}$$

consente di ottenere un margine di fase $\varphi_m \approx 64^\circ$ alla pulsazione $\omega_c \approx 0.218$ rad/s.

Lo si verifichi!

- Scelta del **periodo di campionamento**
 - in base alla pulsazione critica d'anello aperto per il sistema a tempo continuo

$$\omega_c \approx 0.218 \text{ rad/s}$$

ed utilizzando la regola empirica (già vista nella slide #32-33)

$$\alpha \omega_c \leq \omega_s \leq 10 \alpha \omega_c \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

il periodo di campionamento potrebbe essere scelto nell'intervallo

$$\frac{\pi}{5 \alpha \omega_c} \leq T_s \leq \frac{2 \pi}{\alpha \omega_c} \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

cioè

$$\frac{2.88}{\alpha} \leq T_s \leq \frac{28.82}{\alpha} \quad 5 \leq \alpha \leq 10$$

- Una scelta plausibile sembra $T_s = 1 \text{ s}$
- Proviamo a discretizzare il regolatore originario a tempo continuo $R(s)$ con le tecniche BE e TU.
- Otterremo 2 regolatori differenti, dei quali andremo a confrontare le prestazioni.
- Perdita stimata di margine di fase:

$$\delta_\varphi = -\frac{\bar{\omega}_c T_s}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad \rightarrow \quad \delta_\varphi \approx -6^\circ$$

- Esempio in Matlab: **progettoBE_TU.m**

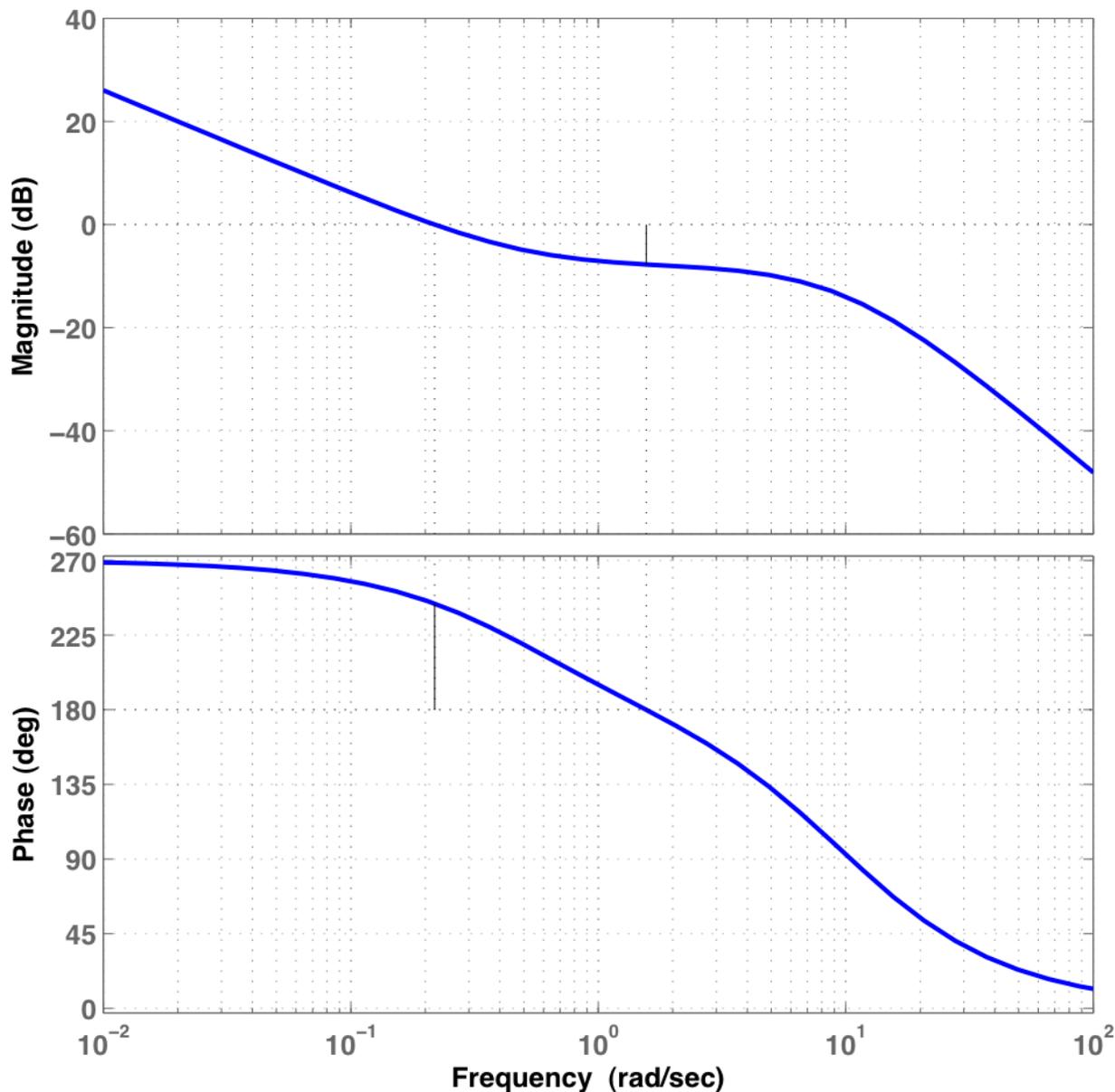
- Progetto BE $R_{BE}(z) = 20 \frac{\left(z - \frac{10}{11}\right)}{\left(z - \frac{1}{11}\right)} \quad T_s = 1$

- Progetto TU $R_{TU}(z) = 35 \frac{\left(z - \frac{19}{21}\right)}{\left(z + \frac{2}{3}\right)} \quad T_s = 1$

- Le loro prestazioni sono descritte dalle figure seguenti. Si noti il degrado di prestazioni per il margine di fase (calcolato) ed anche per il margine di guadagno e banda passante (cfr. FA parte 11, #65).

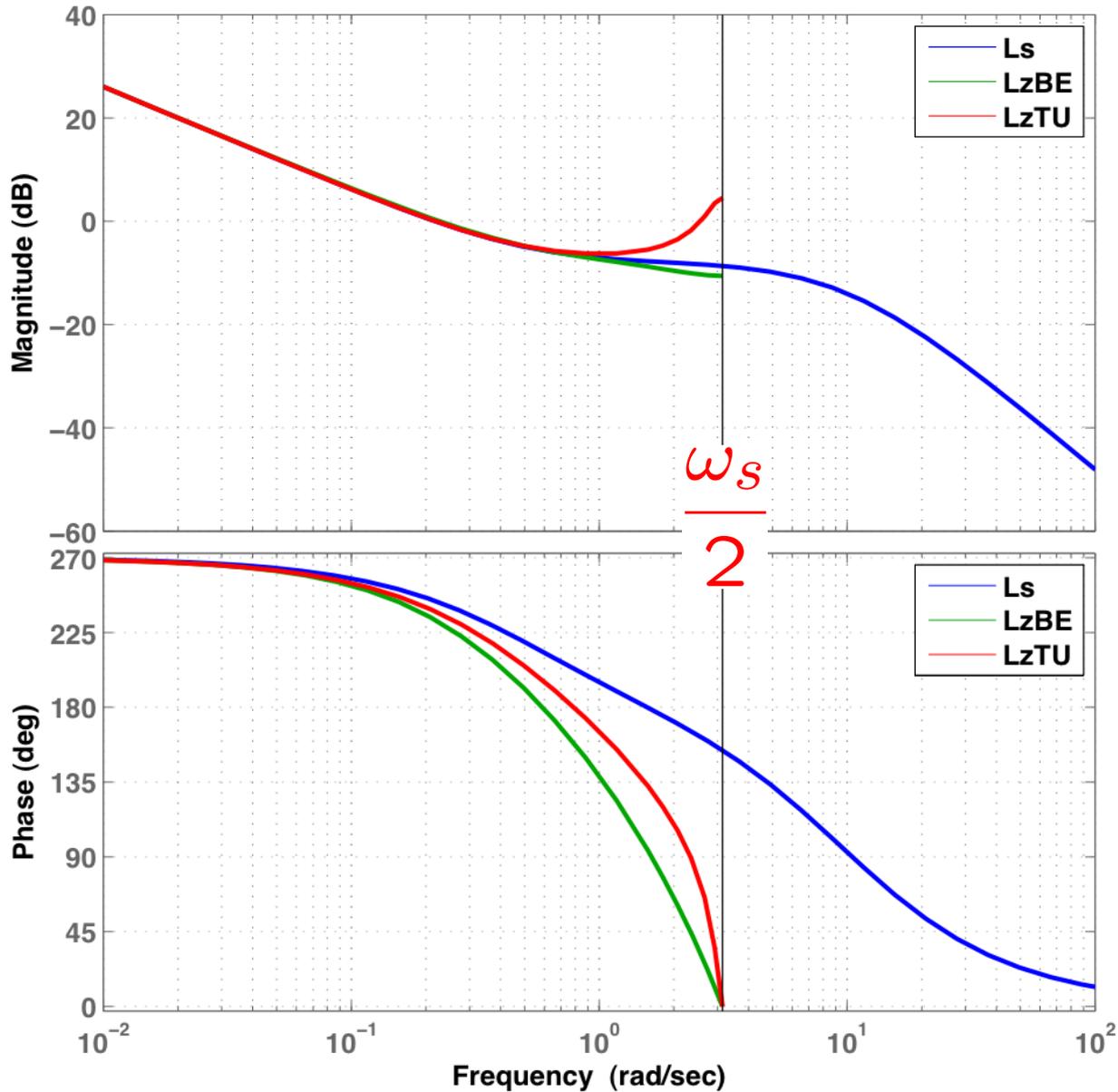
Bode Diagram

Gm = 7.74 dB (at 1.56 rad/sec) , Pm = 63.9 deg (at 0.218 rad/sec)



Prestazioni del sistema a tempo continuo

Bode Diagram

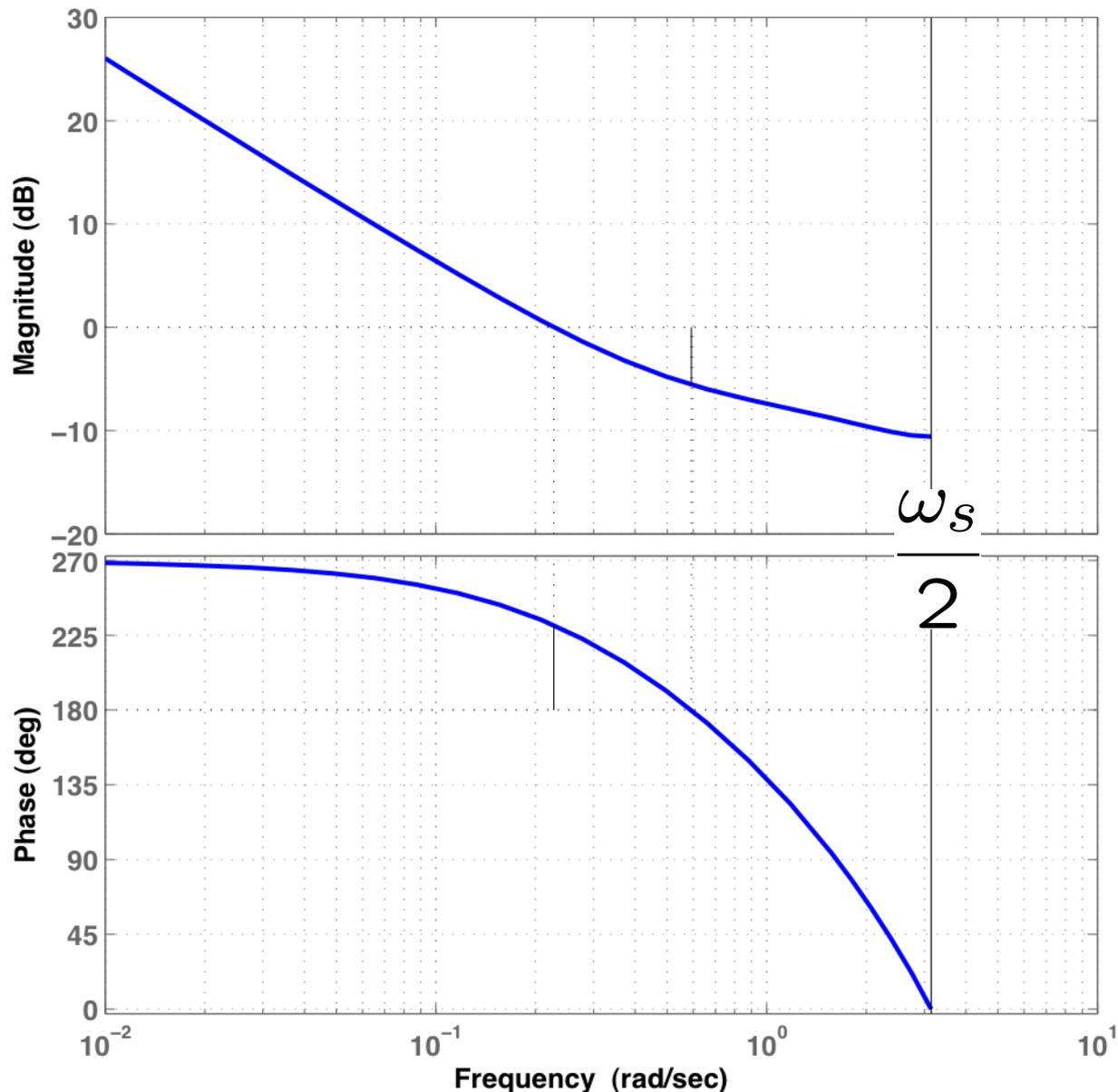


Confronto: risposte in frequenza dei tre progetti: a tempo continuo, con BE, con TU.

$$T_s = 1$$

Bode Diagram

Gm = 5.56 dB (at 0.592 rad/sec) , Pm = 51 deg (at 0.227 rad/sec)

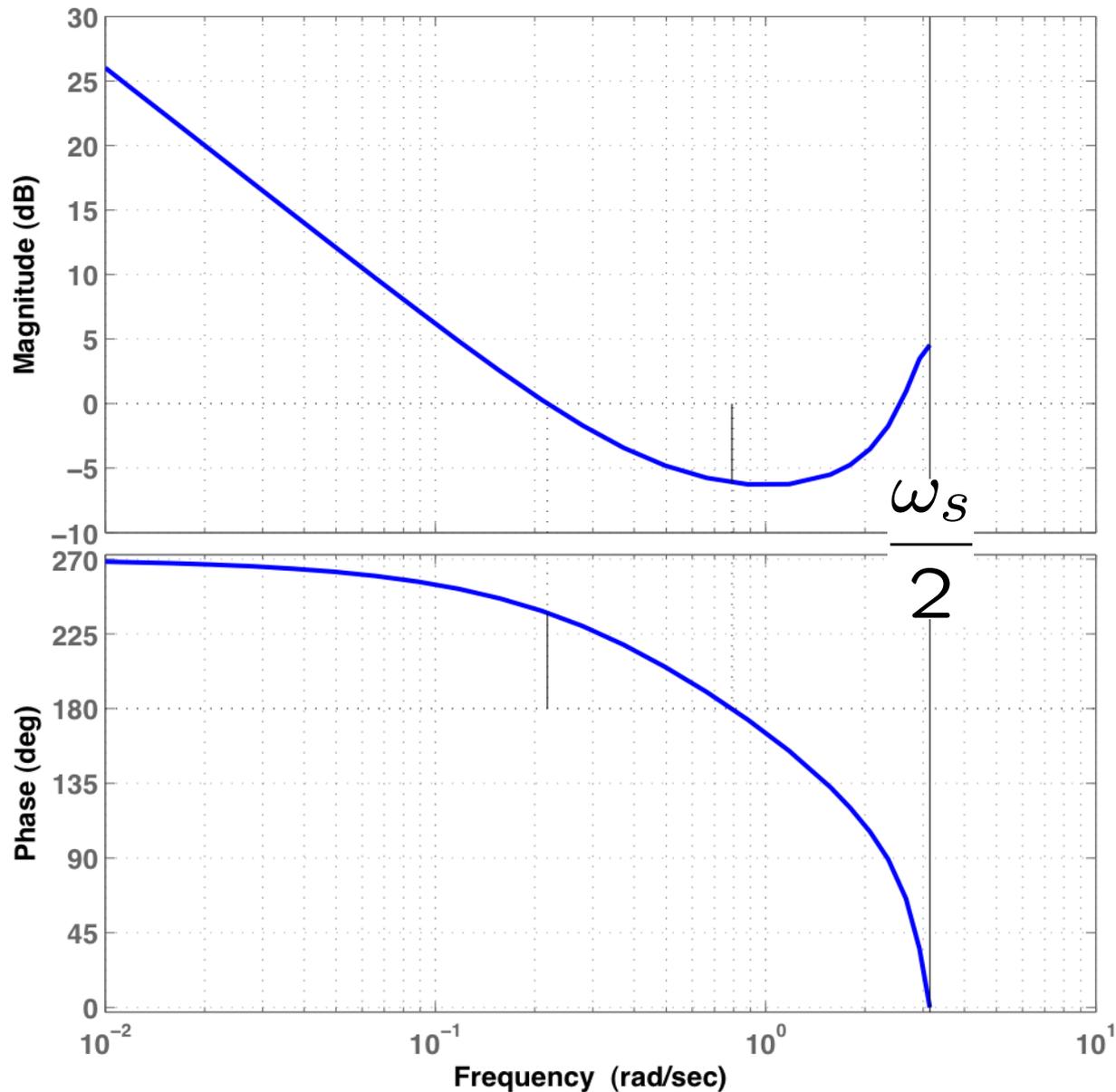


Prestazioni del progetto con la tecnica BE:
 cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = 1$$

Bode Diagram

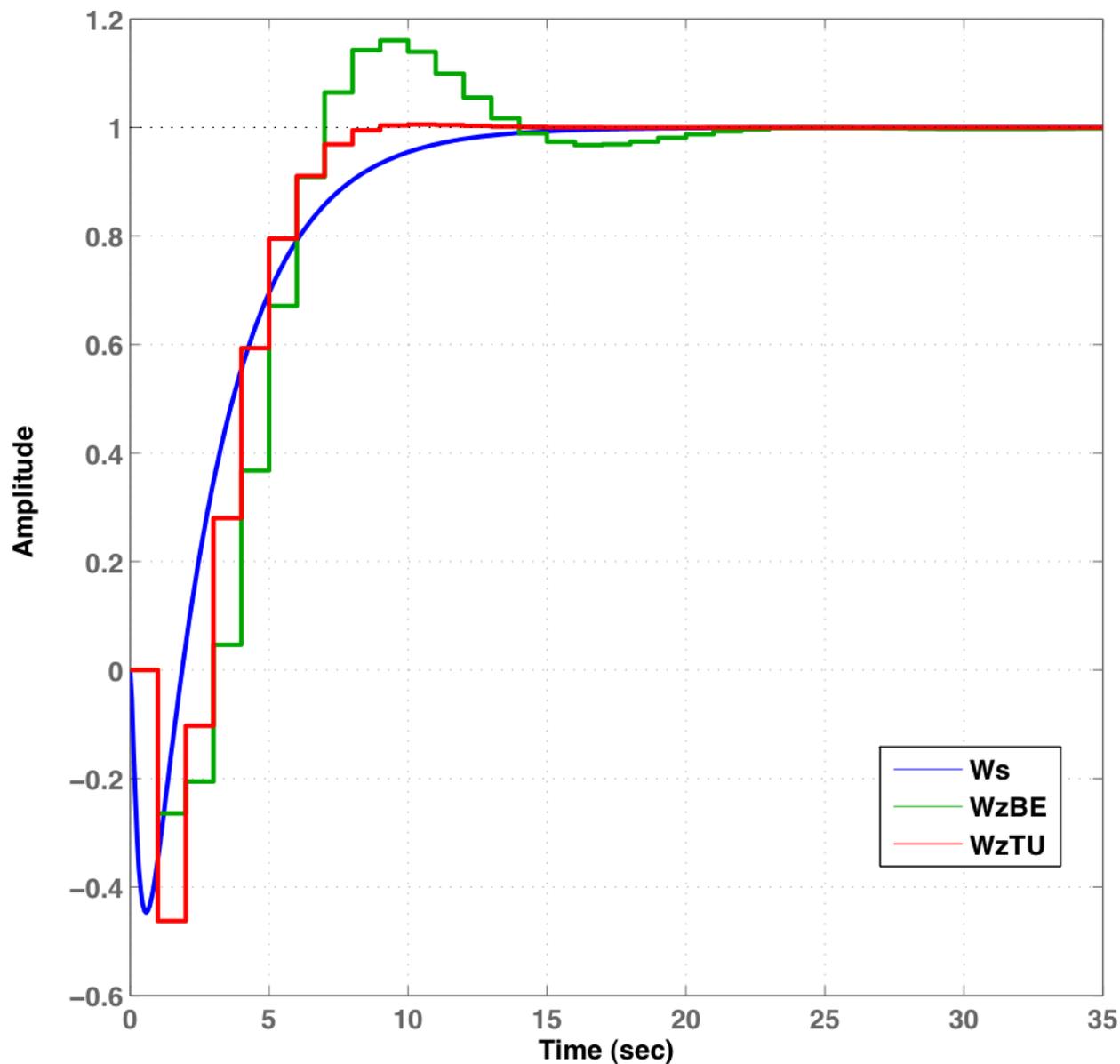
Gm = 6.13 dB (at 0.791 rad/sec) , Pm = 57.7 deg (at 0.218 rad/sec)



Prestazioni del progetto con la tecnica TU:
 cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = 1$$

Step Response



Confronto: risposte allo scalino dei tre progetti: a tempo continuo, con BE, con TU.

$$T_s = 1$$

- Con periodo di campionamento pari invece a $T_s = 0.1$

- Progetto BE
$$R_{BE}(z) = 101 \frac{\left(z - \frac{100}{101}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

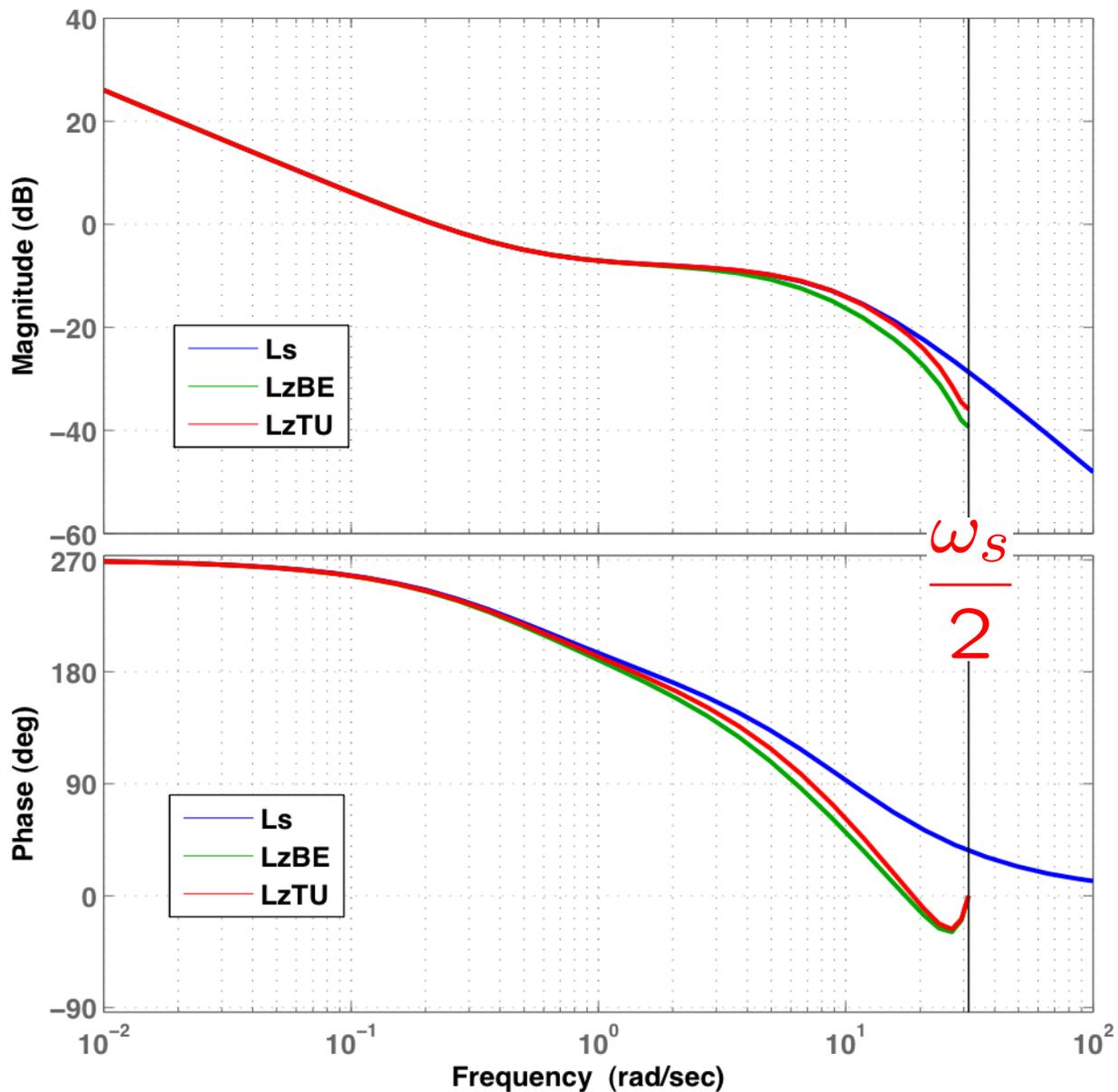
- Progetto TU
$$R_{TU}(z) = 134 \frac{\left(z - \frac{199}{201}\right)}{\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

- $$\delta_\varphi = -\frac{\bar{\omega}_c T_s}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad \rightarrow \quad \delta_\varphi \approx -1^\circ$$

- Le prestazioni dei 2 regolatori ottenuti sono descritte nelle figure successive

progetto_BE_TU.m

Bode Diagram

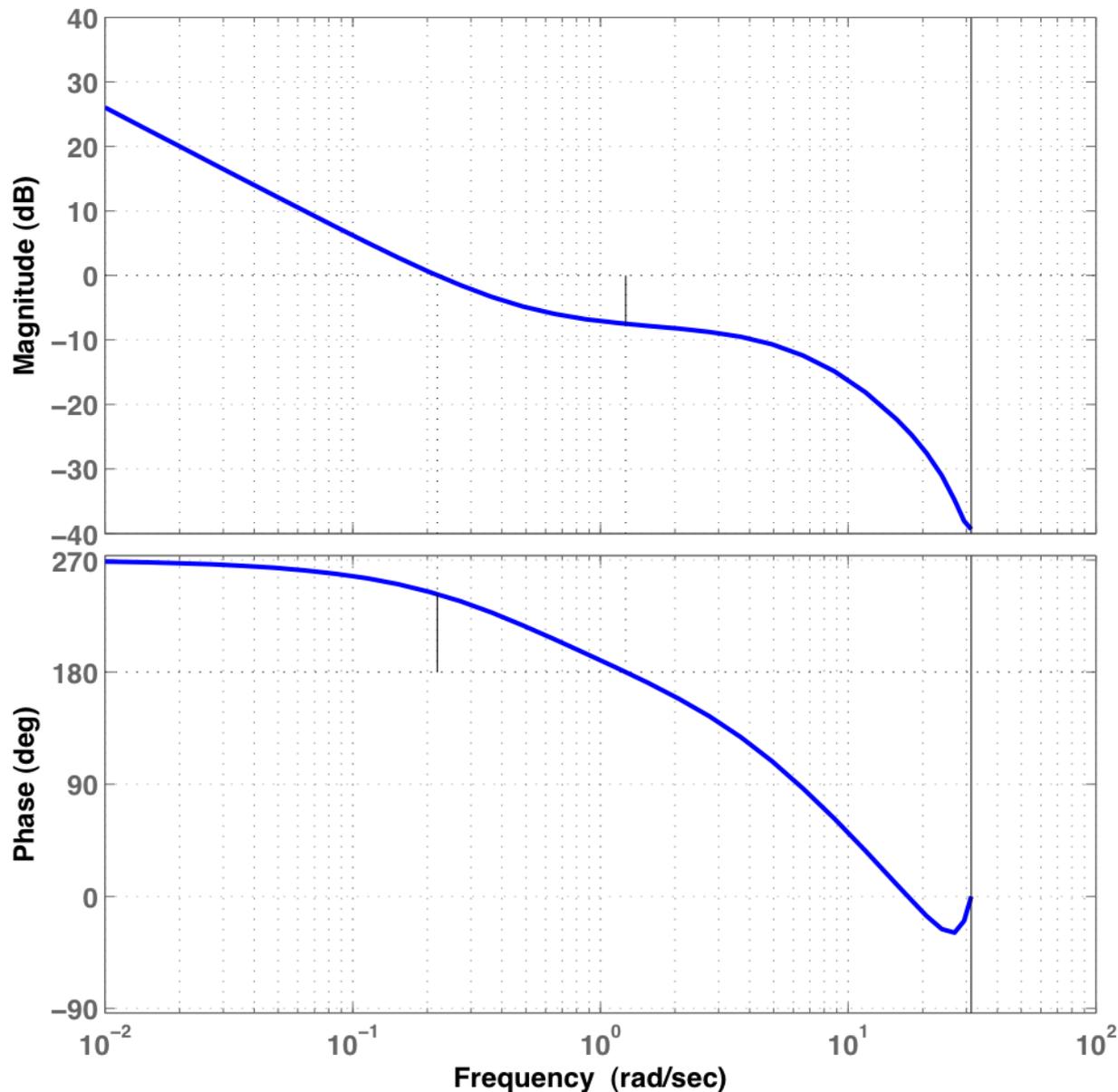


Confronto: risposte in frequenza dei tre progetti: a tempo continuo, con BE, con TU.

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Bode Diagram

Gm = 7.5 dB (at 1.27 rad/sec) , Pm = 62.7 deg (at 0.219 rad/sec)



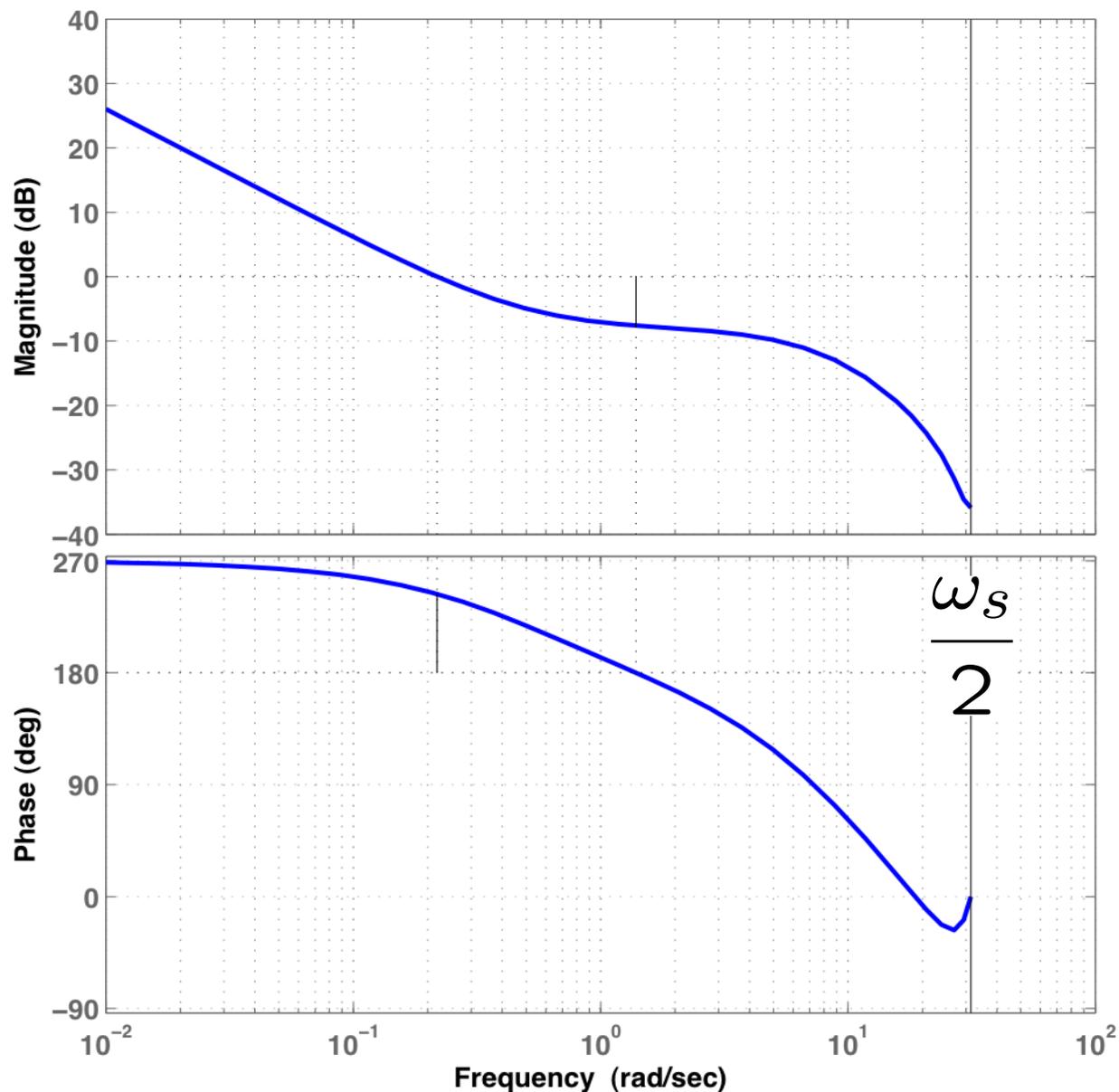
Prestazioni del progetto con la tecnica BE:

cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Bode Diagram

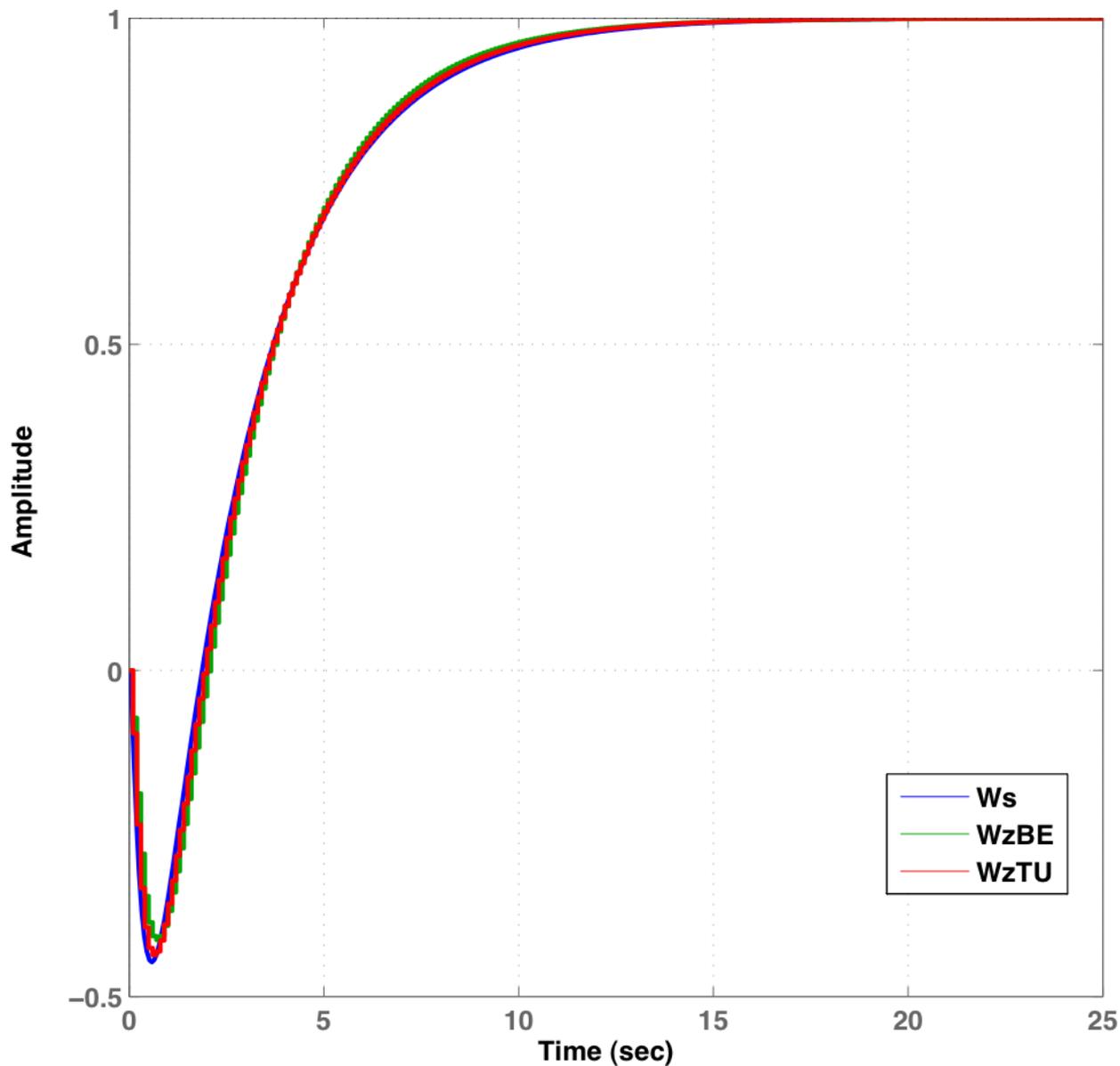
Gm = 7.59 dB (at 1.39 rad/sec) , Pm = 63.3 deg (at 0.218 rad/sec)



Prestazioni del progetto con la tecnica TU:
 cfr. i margini di stabilità con i risultati di #75

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Step Response



Confronto: risposte
allo scalino dei tre
progetti: a tempo
continuo, con BE,
con TU.

$$T_s = \frac{1}{10}$$

Conclusioni

Sintesi di regolatori per discretizzazione
Tecniche approssimate BE, TU

Riassumendo ...

- Progetto per conversione da continuo a discreto con formule approssimate “**Eulero all’ indietro**”, “**di Tustin**”:
 - progetto **preliminare a tempo continuo**, in “s”
 - si tiene conto del campionamento e ricostruzione inserendo nella FdT di ciclo aperto in “s” un termine di **ritardo finito equivalente** pari a $e^{-\frac{T_s s}{2}}$
 - ottenuto un regolatore $R(s)$ che soddisfa le specifiche “irrobustite”, **si applica la formula (BE, TU)** e si ottiene $R(z)$.

Osservazioni ...

- Il **progetto** si completa **totalmente** “a tempo continuo”.
- L'effetto del **dispositivo di tenuta (ZOH)** è soltanto **approssimato**.
- Le **formule di discretizzazione** sono **approssimazioni** della formula esatta del campionamento.
- C'è **scarso controllo sulle prestazioni finali** in frequenza (imprecisioni nell'imporre una larghezza di banda desiderata e/o margini di stabilità ecc.) e nel tempo (es. richieste sulla durata del transitorio ...)
- Esistono tecniche di progetto che danno risultati migliori: saranno approfondite in altri corsi!