

Monimento libero
dello stato di sistemi LTI
a tempo discreto

Utilizzo della Z -Trasformata
e della forma di Jordan

Sistemi Dinamici

22.2013/20

[Es] Dato il sistema LTI a Tempo discreto, di ordine 3, descritto da

$$\begin{cases} x(k+1) = A x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{cases}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e dato iniziale

$$x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

determinare il movimento libero dello stato
a partire dallo stato iniziale $x(0)$
assegnato: $x(k) = ?$

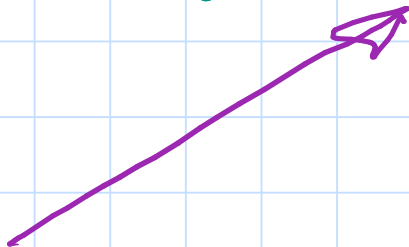
In particolare quanto vale $x(3)$?

$$x(3) = ?$$

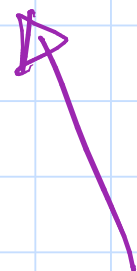
Soluzione

$$x(k) = A^k x(0)$$

forma di
Jordan della
matrice A



utilizzo della
Z-transformata



1° modo: utilizzo della forma di Jordan

polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_{3 \times 3} - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$\downarrow$
= ...

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} =$$

↓
 ← sviluppo secondo
 la 3^a riga

$$= (-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+2} \cdot (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+3} \cdot \lambda \cdot \det \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \dots$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -2 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & -2 & \lambda \end{bmatrix} = \dots = 0 + 2\lambda + \lambda(\lambda^2 - 2)$$

$$= \lambda^3$$

In definition

$$P_A(\lambda) = \lambda^3$$

unico autovalore $\lambda_1 = 0$

multiplicità $\mu_1 = 3$

Per determinare la forma di Jordan sono
calcolati gli indici S_k, μ_k, ν_k $k=1,2,3$

$$S_1 = \text{rank}(A - \lambda_1 I_3) = \text{rank } A = 2$$

$$\mu_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\nu_1 = 1 - 0 = 1$$

μ_1
•

← una unica catena
di autovettori
generalizzati
[quindi catena di
lunghezza 3]

$$\rho_2 = \text{rank} (A - \lambda_1 I_3)^2 = \text{rank } A^2$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \rho_2 = 1$$

μ_1



$\mu_2 - \mu_1$



$$\mu_2 = 3 - 1 = 2$$

$$\nu_2 = 2 - 1 = 1$$

$$J_3 = \text{rank}(A - \lambda_1 I_{3 \times 3})^3 = \text{rank}(A^3)$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = 0$$

$$\mu_3 = 3 - 0 = 3$$

$$\mu_1 \quad \mu_2 - \mu_1 \quad \mu_3 - \mu_2$$

$$J_3 = 3 - 2 = 1$$

NB ovviamente
l'ordine di
 λ_1 è $g = 3$

per la matrice T serve
una colonna di lunghezza 3

$$\ker A = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker A^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\ker A^3 \equiv \mathbb{R}^3$$

per generare la catena

$$\begin{cases} \vec{v} : A^3 \vec{v} = 0 \\ A^2 \vec{v} \neq 0 \end{cases} \quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 \bar{v} = 0 \quad \text{ovviamente}$$

$$A^3 \equiv O_{3 \times 3}$$

$$A^2 \bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \neq 0$$

At!

la catena allora è

$$v^{(1)} = A v^{(2)} \leftarrow v^{(2)} = A \bar{v} \leftarrow v^{(3)} = \bar{v}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione è:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

e la forma di Jordan è

$$J_A = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto

$$A^k = T J_A^k T^{-1}$$

$$k \geq 0$$

$$= T \cdot \left(0 \cdot I_{3 \times 3} + N_3 \right)^k \cdot T^{-1}$$

$$= T \cdot \begin{bmatrix} 0^k & \binom{k}{1} 0^{k-1} & \binom{k}{2} 0^{k-2} \\ 0 & 0^k & \binom{k}{1} 0^{k-1} \\ 0 & 0 & 0^k \end{bmatrix} \cdot T^{-1}$$

Valle che

$$\binom{k}{1} 0^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{per } k=1 \\ 0 & \text{per } k>1 \end{cases}$$

Infatti

$$\text{per } k=0 \rightarrow 0$$

cfr sviluppo di $(I_3 + N_3)^k$

$$\text{per } k=1 \rightarrow \binom{1}{1} 0^0 = 1$$

$$\text{per } k>1 \rightarrow \binom{k}{1} 0^{k-1} = k \cdot 0 = 0$$

In modo analogo si verifica che

$$\binom{k}{2} 0^{k-2} = \begin{cases} \frac{k(k-1)}{2} \cdot 1 = 1 & \text{per } k=2 \\ 0 & \text{per } k \neq 2 \end{cases}$$

sempre con $k \geq 0$

$\mathbb{P}_n$ definition:

$$A^k = T \cdot \begin{bmatrix} \delta(k) & \delta(k-1) & \delta(k-2) \\ 0 & \delta(k) & \delta(k-1) \\ 0 & 0 & \delta(k) \end{bmatrix} \cdot T^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 2\delta(k-2) + \delta(k) & 2\delta(k-1) & -2\delta(k-2) \\ \delta(k-1) & \delta(k) & -\delta(k-1) \\ 2\delta(k-2) & 2\delta(k-1) & \delta(k) - 2\delta(k-2) \end{bmatrix}$$

Il movimento libero dello stato reale

$$x(k) = A^k x(0) = A^k \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \delta(k) + 2\beta \delta(k-1) + 2(\alpha - \gamma) \delta(k-2) \\ \beta \delta(k) + (\alpha - \gamma) \delta(k-1) \\ \gamma \delta(k) + 2\beta \delta(k-1) + 2(\alpha - \gamma) \delta(k-2) \end{bmatrix}$$

In particular

$$x(1) = \begin{bmatrix} 2\beta \\ \alpha - \beta \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 2(\alpha - \beta) \\ 0 \\ 2(\alpha - \beta) \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ k \geq 3$$

II° modo: utilità della Z-Transformata

$$A^k \longleftrightarrow z(zI - A)^{-1}$$

$$x(k) = A^k x(0) \longleftrightarrow X(z) = z(zI - A)^{-1} x(0)$$

$$(z I_{3 \times 3} - A) = \begin{bmatrix} z & -2 & 0 \\ -1 & z & +1 \\ 0 & -2 & z \end{bmatrix}$$

$$(z I_{3 \times 3} - A)^{-1} = \frac{1}{\det(z I_{3 \times 3} - A)} \cdot [C_{ij}]^T$$

$$\det(z I_{3 \times 3} - A) = z^3$$

← già determinato
in precedenza

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} z & +1 \\ -2 & z \end{vmatrix} = (z^2 + 2)$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & +1 \\ 0 & z \end{vmatrix} = +z$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & z \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +2$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & z \end{vmatrix} = +2z$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} = +z^2$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} z & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = +2z$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ z & +1 \end{vmatrix} = -2$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} z & 0 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} = -z$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} z & -2 \\ -1 & z \end{vmatrix} = + (z^2 - 2)$$

$$(zI_{3 \times 3} - A)^{-1} = \frac{1}{z^3} \begin{bmatrix} (z^2+2) & +2 & +2 \\ +2z & +z^2 & +2z \\ -2 & -z & (z^2-2) \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{z^3} \begin{bmatrix} z^2+2 & +2z & -2 \\ +2 & +z^2 & -z \\ +2 & +2z & z^2-2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z}\{A^k\} = z \left(z I_{3 \times 3} - A \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{z^2} \begin{bmatrix} z^2 + 2 & 2z & -2 \\ 2 & z^2 & -z \\ 2 & 2z & z^2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \dots$$

$$\dots = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2}{z^2} & \frac{2}{z} & -\frac{2}{z^2} \\ \frac{2}{z^2} & 1 & -\frac{1}{z} \\ \frac{2}{z^2} & \frac{2}{z} & 1 - \frac{2}{z^2} \end{bmatrix}$$

$$X(z) = z \left(z I_{3 \times 3} - A \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{2}{z^2}\right) \alpha + \frac{2}{z} \beta - \frac{2}{z^2} \gamma \\ \frac{2}{z^2} \alpha + \beta - \frac{1}{z} \gamma \\ \frac{2}{z^2} \alpha + \frac{2}{z} \beta + \left(1 - \frac{2}{z^2}\right) \gamma \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \{ X(z) \}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \{ \delta(k) + 2\delta(k-2) \} + 2\beta \cdot \delta(k-1) - 2\gamma \cdot \delta(k-2) \\ 2\alpha \cdot \delta(k-2) + \beta \cdot \delta(k) - \gamma \cdot \delta(k-1) \\ 2\alpha \cdot \delta(k-2) + 2\beta \cdot \delta(k-1) + \gamma \cdot \{ \delta(k) - 2\delta(k-2) \} \end{bmatrix}$$

In particular

$$x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 2\beta \\ -\gamma \\ 2\beta \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 2\alpha - 2\gamma \\ 2\alpha \\ 2\alpha - 2\gamma \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k \geq 3$$