Calcolo di A^k

Utilizzo della forma canonica di Jordan della matrice A

$\boxed{\text{Es.}}$

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

già in forma di Jordan

$$A = \left[\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right]$$

$J_1 = [1]$

$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A^k = ?$ $k = 0, 1, 2, \ldots$

vale che $A^k = \left[\begin{array}{c|c} J_1^k & 0 \\ \hline 0 & J_2^k \end{array}\right]$

$$A^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 \\ 0 & J_2^k \end{bmatrix}$$

$$J_1^k = 1 \quad \forall k$$

$$J_2^k = ?$$

vale che

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot I_{2\times 2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot I_{2\times 2} + N_2$$

$$J_2^k = (2 \cdot I_{2\times 2} + N_2)^k = 2^k \cdot I_{2\times 2}^k + k 2^{k-1} \cdot I_{2\times 2}^{k-1} \cdot N_2 + \dots$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} I^{k-2} N_2^2 + \dots$$

$$+ k\, 2\, I\, N_2^{k-1} + N_2^k$$

NB $N_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

quindi $N_2^k \equiv O_{2\times 2} \qquad k \geq 2$

In definitiva

$$J_2^k = 2^k \cdot I_{2\times 2} + k \cdot 2^{k-1} \cdot N_2 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$A^k = \left[\begin{array}{c|cc} 1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k & k\,2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{array}\right] \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Es.

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad A^k = ?$$

J_1

J_2

$$J_2^k = \left(2 \cdot I_{3x3} + N_3\right)^k = 2^k \cdot I_{3x3} + k2^{k-1} \cdot N_3 +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} N_3^2 + \dots$$

$$\dots + k\,2 \cdot N_3^{k-1} + N_3^k$$

Vale che

$$N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_3^3 \equiv O_{3\times 3}$$

quindi

$$J_2^k = 2^k I_{3\times 3} + k 2^{k-1} N_3 + \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} N_3^2$$

$$= \ldots$$

$$J_2^k = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k & \binom{k}{1} 2^{k-1} & \binom{k}{2} 2^{k-2} \\ 0 & 2^k & \binom{k}{1} 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

Per la matrice A^k quindi vale che

$$
A^k = \left[\begin{array}{c|ccc} 2^k & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} & \binom{k}{2}2^{k-2} \\ 0 & 0 & 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^k \end{array}\right]
$$

J_1^k

J_2^k

Esercizi "per casa"

Trovare le espressioni di A^k degli esercizi precedenti facendo uso della $\mathcal{Z}$-trasformata

$$A^k = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ z\,(zI-A)^{-1} \right\}$$

Calcolo di A^k

Modi di risposta

Es.

Assegnata la matrice A

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

già in forma di Jordan

$$A = \left[\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right]$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad J_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

determinare i modi di risposta presenti in A^k

Sappiamo già che vale l'espressione seguente

$$A^k = \left[\begin{array}{c|cc} 1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k & k\,2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{array}\right] \qquad k=1,2,\ldots$$

Quali sono allora i modi di risposta?

Modi di risposta

(modo di risposta associato ad autovalore semplice)

$$A^k = A_1 \lambda_1^k \cdot 1(k) +$$

$$+ A_{20}\, k! \binom{k}{0} \lambda_2^k \cdot 1(k) +$$

$$+ A_{21}\, k! \binom{k}{1} \lambda_2^{k-1} 1(k-1)$$

Modi di risposta associati ad autovalore con molteplicità 2 e blocco di Jordan di dimensione 2

Come determinare i modi di risposta?

2 possibilità

utilizzo di

$\mathcal{Z}\{A^k\} = z\,(zI - A)^{-1}$

e le formule precedenti in L2 - p21 e segg.

sfruttare la conoscenza di A^k e della sua forma di Jordan

← uso questo approccio

NB il metodo proposto risulta conveniente se sono già note la forma di Jordan J_A la matrice di trasformazione T e l'espressione di A^k

Altrimenti vanno utilizzate la z-trasformata e le formule in L2 p21

Supponiamo che

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{J_2}} \\ 0 & & \end{array}\right] =$$

come risultato della somma di 2 matrici

$$= \left[\begin{array}{c|cc} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{J_2}} \\ 0 & & \end{array}\right]$$

Come ricavare A^k ?

$$A^k = \left[\begin{array}{c|cc} J_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\overline{J_2}^{\,k}} \\ 0 & & \end{array}\right] = \Bigg(\underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} J_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{M_1} + \underbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{\overline{J_2}} \\ 0 & & \end{array}\right]}_{M_2} \Bigg)^k$$

$$= M_1^k + M_2^k + k M_1^{k-1} M_2 + \binom{k}{2} M_1^{k-2} M_2^2 + \dots$$

$$+ \binom{k}{k-2} M_1^2 M_2^{k-2} + k M_1 M_2^{k-1}$$

NB i prodotti sono tutti nulli!

In definitiva

$$A^k = M_1^k + M_2^k = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{J_2} \\ 0 & & \end{bmatrix}^k$$

In dettaglio

$$A_1 \lambda_1^k \cdot 1(k) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1} \cdot 1^k \cdot 1(k)$$

Al secondo autovalore sono associati 2 modi di risposta (è autovalore con molteplicità algebrica 2 e con associato un blocco di Jordan di dimensioni 2x2)

$$A_{20}\,\lambda_2^{k}\cdot 1(k) + A_{21}\binom{k}{1}\lambda_2^{k-1}\cdot 1(k-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{20}\,\lambda_2^{k}\cdot 1(k) + A_{21}\binom{k}{1}\lambda_2^{k-1}\cdot 1(k-1)$$

A_{20}

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot 2^{k}\cdot 1(k) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\binom{k}{1}2^{k-1}\cdot 1(k-1)$$

A_{21}

2° modo → determinare i modi di risposta usando la z-Trasformata

modo di risposta $A_1 \lambda_1^k \cdot 1(k)$

$$A_1 = \lim_{z \to \lambda_1} \left[(z - \lambda_1)(zI - A)^{-1} \right]$$

Va determinata $(zI-A)^{-1}$

$$(zI-A) = \begin{bmatrix} (z-1) & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & -1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix}$$

quindi

$$(zI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-2} & \frac{1}{(z-2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-2} \end{bmatrix}$$

Finalmente il modo di risposta associato a $\lambda_1 = +1$ vale:

$$A_1 = \lim_{z \to 1} \left[(z-1)(zI - A)^{-1} \right] =$$

$$= \lim_{z \to 1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z-1}{z-2} & \frac{z-1}{(z-2)^2} \\ 0 & 0 & \left(\frac{z-1}{z-2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per gli altri modi di risposta

$$A_{20} = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz}\left[(z-2)^2 (zI - A)^{-1}\right] =$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} (z-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & 1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \lim_{z \to 2} \left[(z-2)^2 (zI - A)^{-1} \right]$$

$$= \lim_{z \to 2} \begin{bmatrix} \frac{(z-2)^2}{z-1} & 0 & 0 \\ 0 & (z-2) & 1 \\ 0 & 0 & (z-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e sapendo che

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 \qquad J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \left(-\frac{1}{16}\right) \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

determinare i modi di risposta di A^k

1° modo: uso J_A e J_A^k

$$J_A^k = (0 \cdot I_{3\times3} + N_3)^k = \begin{bmatrix} 0^k & \binom{k}{1} 0^{k-1} & \binom{k}{2} 0^{k-2} \\ 0 & 0^k & \binom{k}{1} 0^{k-1} \\ 0 & 0 & 0^k \end{bmatrix} =$$

separo i contributi

$$= \begin{bmatrix} 0^k & 0 & 0 \\ 0 & 0^k & 0 \\ 0 & 0 & 0^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & k0^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & k0^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \binom{k}{2} 0^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora ricordando che $A^k = T J_f^k T^{-1}$

posso ottenere i modi di rispota semplicemente così

$$A_{10} \cdot 0^k \cdot 1(k) \Longleftrightarrow T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} \cdot 0^k \cdot 1(k) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 0^k \cdot 1(k)$$

$$A_{11} = T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \binom{k}{1} 0^{k-1} \cdot 1(k-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine

$$A_k = T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \binom{k}{2} 0^{k-2} \, 1 (k-2)$$

$$\Updownarrow$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Facendo uso della Z-Trasformata

$$(zI-A)=\begin{bmatrix} z & -2 & 0 \\ -1 & z & 1 \\ 0 & -2 & z \end{bmatrix}$$

perciò $$(zI-A)^{-1}=\frac{1}{z^3}\begin{bmatrix} z^2+2 & 2z & -2 \\ 2 & z^2 & -z \\ 2 & 2z & z^2-2 \end{bmatrix}$$

e per i modi di risposta si ha $\dfrac{1}{z}$

$$A_{10} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 (zI - A)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[z^3 (zI - A)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \lim_{z \to 0} \left[z^3 (zI - A)^{-1}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$