

Analisi dei sistemi lineari

F. Blanchini e F.A. Pellegrino

14 ottobre 2005

Indice

1	Premessa	3
2	Sistemi di equazioni differenziali lineari	4
2.1	Sistemi a tempo continuo	4
2.1.1	Sistema delle soluzioni	6
2.1.2	Analisi Modale	9
2.2	Sistemi a tempo discreto	16
2.2.1	Sistema delle soluzioni	17
2.2.2	Analisi modale	18
2.3	Approssimazione locale di sistemi non lineari	22
3	Stabilità nei sistemi lineari	26
3.1	Sistemi a tempo continuo	27
3.1.1	Criteri di stabilità	28
3.2	Sistemi a tempo discreto	29
3.2.1	Criteri di stabilità	30
3.3	Regioni di stabilità	30
3.4	Criterio di Routh–Hurwitz	31
3.5	Analisi di stabilità in punti di equilibrio di sistemi non lineari	33
4	Funzioni di trasferimento	37
4.1	Definizione di funzione di trasferimento	37
4.2	La risposta ad un ingresso canonico	41
4.2.1	Cancellazioni zero–polo	43
4.3	La risposta in frequenza	44
4.4	Schemi a blocchi	46
4.4.1	Il problema delle cancellazioni dovute a connessione	52
5	Esempi	55
5.1	Analisi modale	55
5.1.1	Sistemi meccanici ed elettrici del secondo ordine	55
5.1.2	Giunto elastico.	57
5.2	Sistemi non lineari	59
5.2.1	Circuito elettrico non lineare.	59

5.2.2	Compressore centrifugo	63
5.3	Funzione di trasferimento	66
5.3.1	Calcolo di una funzione di trasferimento	66
5.3.2	Calcolo della risposta tramite funzione di trasferimento	68
5.3.3	Calcolo della risposta tramite funzione di trasferimento	70
5.3.4	Filtraggio di una misura	75
5.4	Controllo in retroazione	77
5.4.1	Sistema termico	77
6	Elementi di matematica	83
6.1	Algebra lineare	83
6.1.1	Spazi vettoriali	83
6.1.2	Matrici	85
6.1.3	Autovalori e autovettori	90
6.1.4	Polinomi e serie di potenze	93
6.2	La risposta impulsiva	95
6.3	Trasformate di Laplace	97
6.3.1	Definizione e proprietà fondamentali	97
6.3.2	Trasformate principali	98
6.3.3	Antitrasformate di funzioni razionali proprie	99
6.4	Trasformata Zeta	104
7	Bibliografia	105

Capitolo 1

Premessa

Questo testo è stato pensato e scritto per studenti del corso di Controlli Automatici I della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Udine, Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e Ingegneria Gestionale dell'Informazione e come testo riassuntivo dei concetti basilari per i corsi di Controlli Automatici II e il corso integrato di Teoria dei Sistemi I e II dei medesimi corsi di Laurea. Lo spirito della stesura non è stato quello di creare un nuovo libro ma molto più semplicemente degli appunti che riassumano in modo *breve e schematico* i concetti presentati nel corso.

Questa dispensa (anche se è un'esagerazione chiamiamola così) non ha alcuna pretesa di completezza e non deve in nessun modo essere pensata come sostitutiva di un buon libro di testo dal quale non si può prescindere. Sono disponibili molti libri di testo di Controlli Automatici di alta qualità. Apprendere tramite libri ad ampia diffusione è importante perché permette a studenti di diversa provenienza di acquisire un linguaggio comune. Quindi i libri consigliati sono da ritenersi fondamentali per lo studio dei corsi di Controlli Automatici. Il presente testo deve essere dunque considerato come un riassunto schematico dei concetti presentati nel corso ed una integrazione del libro di testo.

Importate: la presente versione è ancora preliminare, una bozza resa immediatamente disponibile agli studenti interessati, anche per ricevere commenti, critiche e suggerimenti. Ci scusiamo per gli inevitabili errori e saremo grati a chi vorrà segnalarcene (possibilmente via email: blanchini@uniud.it).

Capitolo 2

Sistemi di equazioni differenziali lineari

L'analisi e il progetto del controllo di sistemi dinamici richiedono l'uso di modelli affidabili che descrivano il processo in esame. Molti sistemi di interesse possono essere descritti tramite equazioni differenziali o tramite equazioni alle differenze. In questo capitolo studieremo le proprietà fondamentali delle equazioni differenziali e alle differenze lineari. Per tale categoria di sistemi valgono proprietà molto forti quali il principio di sovrapposizione degli effetti e l'analisi modale e lo studio è agevolato da strumenti matematici molto potenti quali quelli dell'algebra lineare e le trasformate di Laplace. Vedremo poi brevemente come, attraverso la linearizzazione attorno ai punti di equilibrio, tali strumenti possano essere applicati con successo anche ai sistemi non lineari. Quest'ultimo argomento importante verrà ripreso e approfondito nei corsi successivi.

2.1 Sistemi a tempo continuo

Un sistema di n equazioni differenziali lineari ad m ingressi e p uscite è rappresentato da n equazioni di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t) \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t) \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t) \dots, u_m(t), t)\end{aligned}$$

e da p equazioni di uscita

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t) \dots, u_m(t), t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t) \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$y_p(t) = g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t) \dots, u_m(t), t).$$

Introducendo le notazioni

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

tali equazioni possono essere rappresentate in modo sintetico come segue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (2.1)$$

dove $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Definizione Data una funzione (vettoriale) $u(t)$ detta ingresso del sistema, dicesi soluzione del sistema una qualsiasi funzione differenziabile $x(t)$ che verifichi la prima delle equazioni in (2.1). Il vettore $x(t)$ è detto vettore di stato del sistema. La corrispondente funzione (vettoriale) $y(t)$ è detta uscita.

Per esempio dato il sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{x_1(t)}x_2(t) \\ -u(t)\sqrt{x_1(t)} \end{bmatrix}.$$

è facile verificare che, per $u(t) \equiv 1$, il vettore di funzioni

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$

è soluzione del sistema.

Nel seguito sarà assunto che il sistema in questione ha la seguente proprietà: per qualsiasi funzione di ingresso $u(t)$ continua a tratti¹, fissata una

¹una funzione continua a tratti è una funzione che ammette al più un numero finito di discontinuità in ogni intervallo limitato

condizione iniziale $x(t_0) \in \mathfrak{R}^n$, il sistema ammetta una ed una sola soluzione $x(t)$ (matematicamente si dice che il problema è ben posto).

Definizione Il sistema (2.1) si dice *tempo-invariante*, se le funzioni f e g non dipendono esplicitamente dal tempo, precisamente se sono nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

Chiaramente, la variabile tempo ha comunque un ruolo in quanto argomento delle funzioni $x_i(t)$ e $u_j(t)$. Per esempio il sistema scalare

$$\dot{x}(t) = -(1 + t^2)x(t) + \arctan(t)u(t)$$

non è tempo-invariante mentre

$$\dot{x}(t) = -x(t)u(t)$$

è tempo-invariante.

Definizione Il sistema (2.1) si dice *lineare* se le funzioni f e g sono lineari rispetto a x e u , cioè se si può scrivere

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

dove per ogni t le matrici $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ hanno rispettivamente le seguenti dimensioni: $A(t) : n \times n$, $B(t) : n \times m$, $C(t) : p \times n$, $D(t) : p \times m$.

Il caso particolare (ma di notevole interesse) è quello in cui le matrici $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ e $D(t)$ siano tempo invarianti. In questo caso si parla di *sistemi lineari invarianti a tempo continuo*, che saranno il principale oggetto della presente trattazione:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Di fatto l'ipotesi più restrittiva non è quella della tempo-invarianza ma quella di linearità. Infatti nella pratica la maggior parte dei sistemi che si incontrano sono tempo-invarianti, ma è meno frequente il caso in cui l'ipotesi di linearità è verificata. Vedremo, d'altro canto, come lo studio dei sistemi lineari possa fornire soluzioni molto efficaci per lo studio di sistemi non-lineari in prossimità di punti di equilibrio.

2.1.1 Sistema delle soluzioni

L'ipotesi di linearità consente – per applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti – di scomporre la soluzione del sistema (2.3) nelle due

componenti $x_L(t)$ detta *soluzione libera* del sistema e $x_F(t)$ detta *soluzione forzata* del sistema:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t). \quad (2.4)$$

La soluzione libera è la soluzione del sistema ottenuta annullando l'ingresso:

$$x_L(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) \text{ assegnato} \end{cases} \quad (2.5)$$

La soluzione forzata è la soluzione del sistema ottenuta annullando la condizione iniziale:

$$x_F(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Risposta libera

La soluzione del problema di Cauchy definito dal sistema (2.5) risulta:

$$x_L(t) = e^{At}x(0). \quad (2.7)$$

dove la matrice di funzioni e^{At} è definita come

$$e^{At} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k. \quad (2.8)$$

Si può verificare facilmente che l'espressione (2.5) rappresenta la soluzione:

$$\begin{aligned} \dot{x}_L(t) &= \frac{d}{dt}[e^{At}x(0)] = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k\right)x(0) \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1}\right]x(0) = A\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1}\right]x(0) \end{aligned}$$

Ponendo $h = k - 1$ si ottiene:

$$\dot{x}_L(t) = A\left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{A^h}{h!} t^h\right)x(0) = Ae^{At}x(0)$$

la qual cosa implica

$$\Rightarrow \dot{x}_L(t) = Ax_L(t)$$

pertanto la prima delle (2.5) è soddisfatta. Inoltre, anche la condizione iniziale è verificata poiché per $t = 0$ risulta:

$$x_L(0) = e^{A0}x(0) = x(0).$$

c.v.d.

Soluzione forzata

La soluzione del problema di Cauchy definito dal sistema (2.6) risulta:

$$x_F(t) = \int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma. \quad (2.9)$$

Anche in questo caso si può verificare l'esattezza di tale espressione ²

$$\dot{x}_F(t) = \int_0^t Ae^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma + e^{A0} Bu(t) = A \int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma + IBu(t)$$

il che implica $\dot{x}_F(t) = Ax_F(t) + Bu(t)$. Inoltre, per $t = 0$ risulta $x_F(0)$:

$$x_F(0) = \int_0^0 e^{A(0-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma = 0.$$

c.v.d.

Il sistema delle soluzioni

Sostituendo l'espressione della soluzione libera (2.7) e l'espressione della soluzione forzata (2.9) nella (2.3), si ottiene il sistema delle soluzioni:

$$\begin{cases} x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma \\ y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma + Du(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Consideriamo ora, per semplicità, il caso $D = 0$. Per sistemi ad un ingresso e una uscita ($p = m = 1$), la risposta forzata è uno scalare ed ha la seguente espressione:

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma.$$

Detta

$$\delta(t - t_0)$$

la funzione impulso di Dirac e posto $u(t) = \delta(t - t_0)$ con $0 < t_0 < t$ abbiamo che³

$$y_{imp}(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\sigma)} B\delta(t - t_0) d\sigma = Ce^{A(t-t_0)} B$$

è la *risposta all'impulso*. Tornando al caso di p e m generici possiamo dare la seguente definizione.

Definizione La matrice

$$W(t - t_0) = Ce^{A(t-t_0)} B \quad (2.11)$$

è detta *matrice delle risposte impulsive*. Tale matrice gode della seguente

Proprietà: La componente $W_{ij}(t - t_0)$ rappresenta per $t > t_0$ l'uscita i all'istante t provocata da un impulso sull'ingresso j all'istante t_0 .

²qui usiamo la proprietà $\frac{d}{dt} \int_0^t \phi(t, \sigma) d\sigma = \phi(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \sigma) d\sigma$, valida per ogni funzione differenziabile con continuità ϕ .

³per considerare l'impulso nell'origine (per $t_0 = 0$) basta considerare l'integrale fra gli estremi 0^- e t

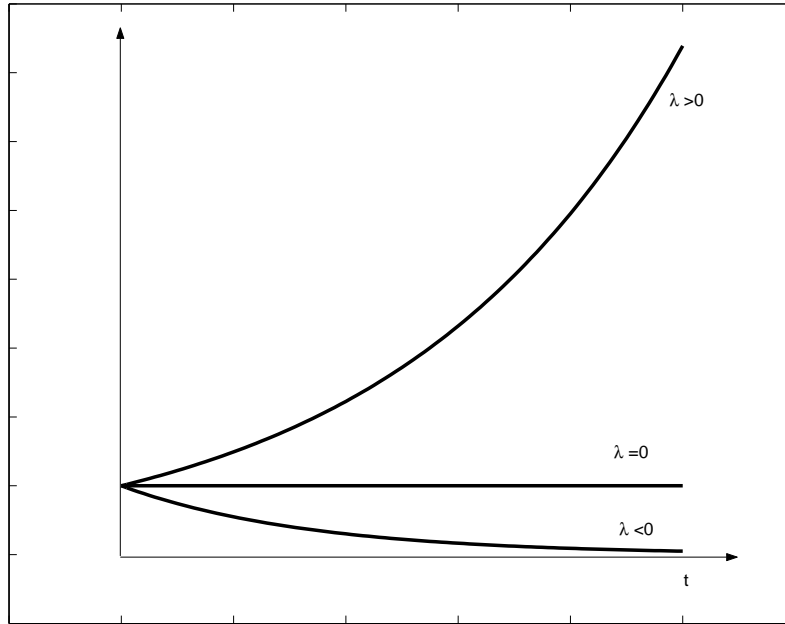


Figura 2.1: $e^{\lambda t}$ per $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.

2.1.2 Analisi Modale

Lo studio del sistema delle soluzioni di un sistema lineare a tempo continuo risulta notevolmente semplificato nel caso in cui A è una matrice diagonalizzabile.

Il caso di A diagonalizzabile

Sotto l'ipotesi di A diagonalizzabile è lecito porre:

$$\begin{cases} A = T\Lambda T^{-1} \\ \Lambda = T^{-1}AT \end{cases}$$

dove Λ è una matrice diagonale avente elementi diagonali pari a $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, con λ_i i -esimo autovalore della matrice A . T è la matrice le cui colonne sono gli autovettori t_i della matrice A . La sua inversa $S = T^{-1}$ può essere partizionata per righe:

$$T = [t_1 t_2 \dots t_n], \quad T^{-1} = S = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix}.$$

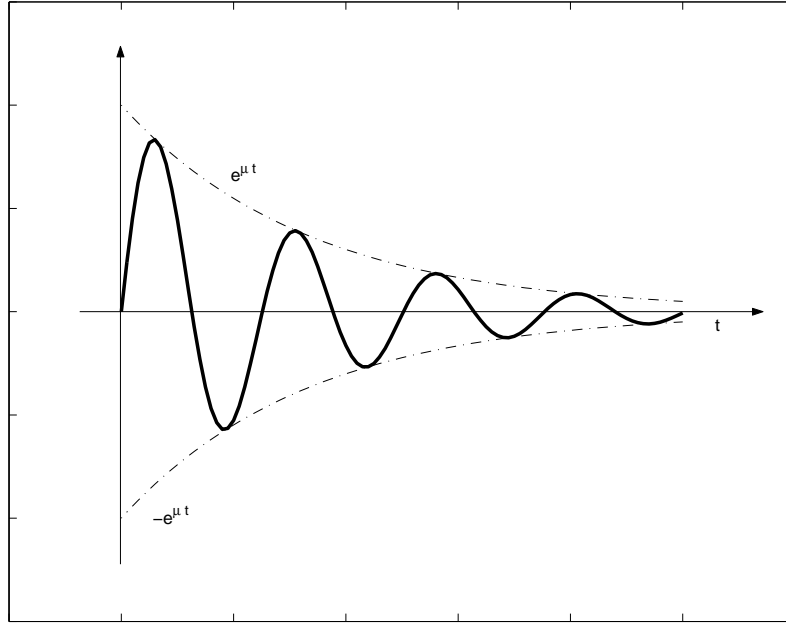


Figura 2.2: $e^{\mu t} \sin(\omega t)$ per $\mu < 0$.

Pertanto la matrice A può essere così rappresentata:

$$A = [t_1 t_2 \dots t_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Tale cambiamento di base consente di esprimere il termine e^{At} in una nuova forma in grado di fornire utili informazioni sul comportamento del sistema:

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (T \Lambda T^{-1})^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(T \Lambda T^{-1} T \Lambda T^{-1} \dots T \Lambda T^{-1})}_{k \text{ volte}} \frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} T \Lambda^k T^{-1} \frac{t^k}{k!} = T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda^k \frac{t^k}{k!} \right) T^{-1} \end{aligned}$$

il che implica

$$e^{At} = T e^{\Lambda t} S,$$

dove $S = T^{-1}$. Esplicitando le colonne t_i di T e le righe s_i^T di $S = T^{-1}$

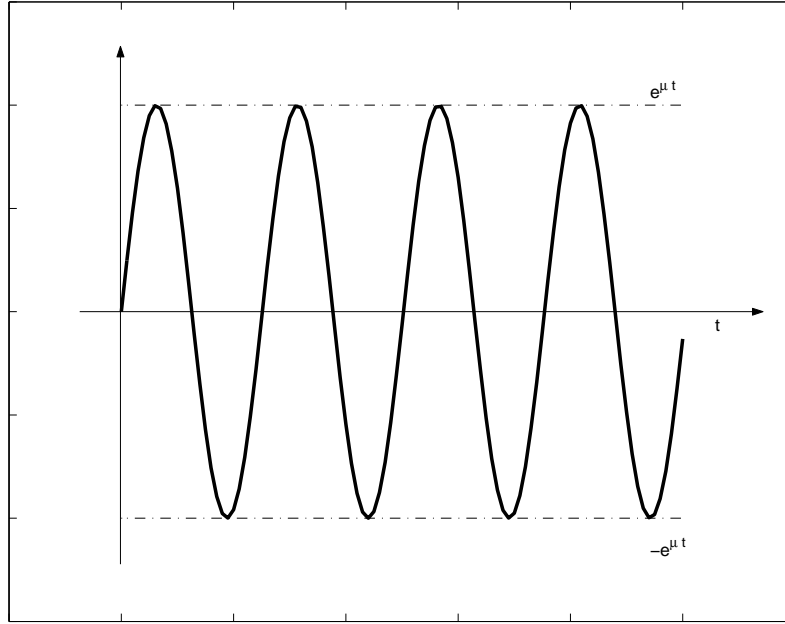


Figura 2.3: $e^{\mu t} \sin(\omega t)$ per $\mu = 0$.

risulta:

$$e^{At} = [t_1 t_2 \dots t_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n t_i s_i^T e^{\lambda_i t}.$$

Definendo le n matrici quadrate $n \times n$

$$Z_i = t_i s_i^T,$$

dette *matrici componenti* di A , abbiamo dunque che vale la seguente

Proprietà: la matrice di transizione e^{At} è data dalla somma di matrici costanti Z_i ciascuna moltiplicata per la funzione $e^{\lambda_i t}$

$$e^{At} = \sum_{i=1}^n Z_i e^{\lambda_i t}. \quad (2.13)$$

La soluzione libera (2.7) del sistema può essere dunque espressa come:

$$x_L(t) = \sum_{k=1}^n Z_k e^{\lambda_k t} x(0) = \sum_{k=1}^n t_k (s_k^T x(0)) e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^n t_k \alpha_k(x(0)) e^{\lambda_k t} \quad (2.14)$$

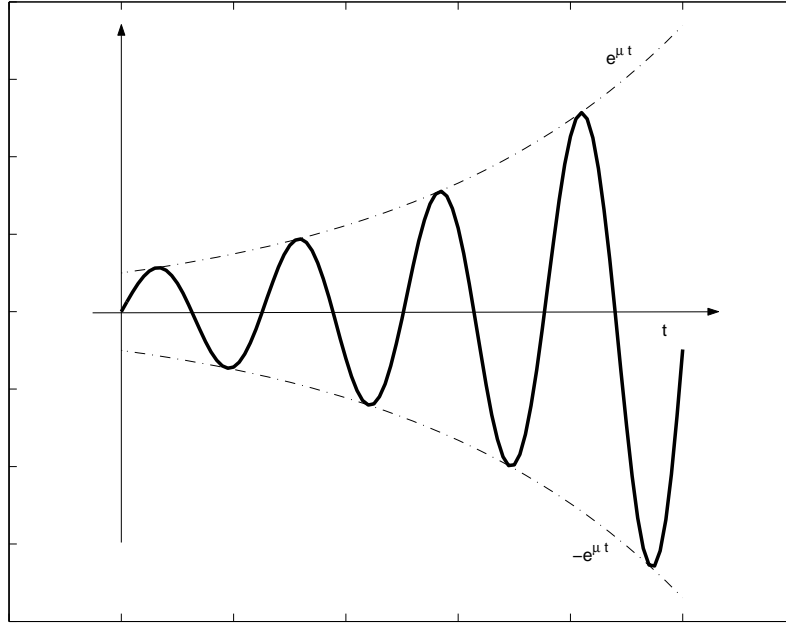


Figura 2.4: $e^{\mu t} \sin(\omega t)$ per $\mu > 0$.

dove $\alpha_k(x(0)) = s_k^T x(0)$, $k = 1, 2, \dots, n$ sono scalari dati dal prodotto scalare fra ciascuno degli autovettori sinistri e il vettore di condizioni iniziali. Le funzioni

$$e^{\lambda_k t}$$

vengono dette *modi del sistema* e hanno un ruolo fondamentale in quanto caratterizzano la risposta libera. Nel caso in cui l'autovalore λ della matrice diagonalizzabile A è reale, la funzione modale $e^{\lambda t}$ è un esponenziale che per t crescenti ha le seguenti caratteristiche (Fig.2.1):

1. se $\lambda > 0$ il modo diverge;
2. se $\lambda < 0$ il modo converge;
3. se $\lambda = 0$ il modo è costante (pari a 1).

Nel caso in cui gli autovalori λ_k della matrice diagonalizzabile A siano complessi fra i termini $e^{\lambda_k t}$ ve ne sono di complessi (si ricordi che se λ è autovalore della matrice A , lo è anche il suo coniugato λ^* , e analogamente per gli autovettori t).

In tutta generalità, si assuma che gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, con $r \leq n$, siano numeri reali, e che gli autovalori $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ siano numeri complessi,

ordinati a coppie $\lambda_{i+1} = \lambda_i^*$, ossia

$$\sigma(A) = \{ \underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}_{\text{reali}}, \underbrace{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+1}^*}_{\text{coniugati}}, \underbrace{\lambda_{r+3}, \lambda_{r+3}^*}_{\text{coniugati}}, \dots, \underbrace{\lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^*}_{\text{coniugati}} \}.$$

Allora, tenendo conto che ad autovalori complessi coniugati possiamo sempre associare autovettori sinistri e destri complessi coniugati, abbiamo che Z_k e Z_{k+1} sono coniugati se lo sono λ_k e λ_{k+1} . Dunque possiamo scrivere

$$e^{At} = \sum_{k=1}^r Z_k e^{\lambda_k t} + \sum_{r+1}^{n-1} (Z_k e^{\lambda_k t} + Z_k^* e^{\lambda_k^* t})$$

(passo 2)

(la sommatoria con passo 2 è la sommatoria estesa a $r+1, r+3, r+5, \dots$).
Decomponendo λ_i e Z_i nella parte reale e immaginaria abbiamo

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \mu_i + j\omega_i \\ Z_i &= M_i + jN_i. \end{aligned}$$

Dalla formula di Eulero

$$e^{\lambda_k t} = e^{\mu_k t} [\cos(\omega_k t) + j \sin(\omega_k t)]$$

con semplici calcoli possiamo constatare che i contributi delle parti immaginarie si elidono

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=1}^r Z_k e^{\mu_k t} + \\ &+ \sum_{r+1}^{n-1} 2e^{\mu_k t} [M_k \cos(\omega_k t) - N_k \sin(\omega_k t)]. \end{aligned}$$

(passo 2)

Si può notare dunque la cosa di fondamentale importanza:

Proprietà: ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\lambda = \mu + j\omega$ e $\lambda^* = \mu - j\omega$ corrispondono funzioni modali del tipo $e^{\lambda t}$ e $e^{\lambda^* t}$ complessi, che danno luogo a modi reali del tipo

$$e^{\mu t} \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad e^{\mu t} \sin(\omega t).$$

L'andamento del sistema delle soluzioni risulta dunque governato da esponenziali reali associati agli autovalori reali e da oscillazioni convergenti o divergenti. La loro natura convergente o divergente dipende dalla parte reale degli autovalori (Figg. 2.2, 2.3, 2.4):

1. se $\mu < 0$ l'oscillazione converge;
2. se $\mu = 0$ l'oscillazione è ad ampiezza costante;
3. se $\mu > 0$ l'oscillazione diverge.

A non diagonalizzabile

Nel caso in cui la matrice A non sia diagonalizzabile il problema risulta molto più complicato e ne daremo un semplice cenno. Si può dimostrare che che esiste una matrice $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tale che $J = T^{-1}AT$ è diagonale a blocchi

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s),$$

dove il k -esimo blocco $J_k \in \mathfrak{R}^{\nu_k \times \nu_k}$ è della forma

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_k & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}}_{=\lambda_k I} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\doteq J_{k0}}$$

così che

$$J_k = \Lambda_k + J_{k0}.$$

Le matrici J_k sono dette *blocchi di Jordan*, mentre la J è detta *forma di Jordan* associata ad A . Tale forma è unica a meno dell'ordine dei blocchi sulla diagonale. Utilizzando una banale estensione del procedimento seguito nel caso di A diagonalizzabile, è possibile esprimere il termine e^{At} in una nuova forma in grado di fornire utili informazioni sull'andamento del sistema:

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} \quad (2.15)$$

dove

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{J_s t} \end{bmatrix}.$$

Dalla definizione delle matrici Λ_k e J_{k0} segue che il loro prodotto è commutativo: $\Lambda_k J_{k0} = J_{k0} \Lambda_k$. Questo implica che il generico termine $e^{J_k t}$ può essere espresso come

$$e^{J_k t} = e^{\lambda_k I t} e^{J_{k0} t}. \quad (2.16)$$

Le potenze delle matrici J_{k0} si ottengono, come facilmente verificabile, spostando in alto a destra la “diagonale degli 1”

$$J_{k0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{k0}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{k0}^{\nu_k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad J_{k0}^{\nu_k} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Inoltre le potenze dalla ν_k -esima in poi, dove ν_k è la dimensione di J_{k0} sono nulle. Questo ci permette di dire che la serie che genera $e^{J_{k0}t}$ è in realtà una sommatoria finita

$$e^{J_{k0}t} = \sum_{k=0}^{\nu_k-1} \frac{1}{k!} J_{k0}^k t^k.$$

Inoltre

$$e^{\lambda_k I t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_k t} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{\lambda_k t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_k t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix}.$$

Dunque il k -esimo blocco della e^{Jt} ha l'espressione

$$e^{J_k t} = \sum_{n=0}^{\nu_k-1} J_{k0}^n \frac{t^n}{n!} e^{\lambda_k t}. \quad (2.17)$$

Tornando alla matrice esponenziale, posto $S = T^{-1}$ e partizionando T e S per blocchi di colonne e righe (coerentemente alle dimensioni dei blocchi diagonali) si ha

$$e^{At} = [T_1 T_2 \dots T_s] \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{J_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1^T \\ S_2^T \\ \vdots \\ S_s^T \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

dove $T_k \in \mathfrak{R}^{n \times \nu_k}$ e $S_k^T \in \mathfrak{R}^{\nu_k \times n}$. Si ottiene quindi l'espressione

$$e^{At} = \sum_{k=1}^s [T_k e^{J_k t} S_k^T], \quad (2.19)$$

ed esplicitando $e^{J_k t}$:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{\nu_k-1} T_k J_{k0}^i S_k^T \frac{t^i}{i!} e^{\lambda_k t}.$$

Ponendo infine $Z_{ki} = T_k J_{k0}^i S_k^T \frac{1}{i!}$ si giunge all'espressione:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{\mu_k-1} Z_{ki} t^i e^{\lambda_k t}. \quad (2.20)$$

Conclusion Se esistono blocchi di Jordan di ordine maggiore ad uno, associati all'autovalore λ , nella matrice e^{At} compariranno delle funzioni modali del tipo

$$e^{\lambda t}, \quad t e^{\lambda t}, \quad t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{(\nu(\lambda)-1)} e^{\lambda t}$$

dove l'indice $\nu(\lambda)$ indica il *grado dell'autovalore* λ , ovvero la dimensione del più grande dei blocchi associati a λ .

Esempio Se una matrice A ha la seguente forma di Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

i suoi autovalori sono 2 e 5, aventi grado $\nu(2) = 3$ e $\nu(5) = 2$ rispettivamente. I modi associati ad e^{At} sono

$$e^{2t}, \quad t e^{2t}, \quad t^2 e^{2t}, \quad e^{5t}, \quad t e^{5t}.$$

2.2 Sistemi a tempo discreto

Un *sistema dinamico regolare a tempo discreto* ammette la seguente rappresentazione

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases} \quad (2.21)$$

dove $x(k) \in \mathfrak{R}^n$, $u(k) \in \mathfrak{R}^m$ e $y(k) \in \mathfrak{R}^p$ sono delle successioni vettoriali (ovvero dei vettori di successioni). L'equazione (2.21) è equivalente alla

rappresentazione data dalle n equazioni di stato

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), u_2(k) \dots, u_m(k), k) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), u_2(k) \dots, u_m(k), k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= f_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), u_2(k) \dots, u_m(k), k) \end{aligned}$$

e dalle p equazioni di uscita

$$\begin{aligned} y_1(k) &= g_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), u_2(k) \dots, u_m(k), k) \\ y_2(k) &= g_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), u_2(k) \dots, u_m(k), k) \\ &\vdots \\ y_p(k) &= g_p(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), u_2(k) \dots, u_m(k), k). \end{aligned}$$

Nella presente trattazione considereremo prevalentemente sistemi *tempo invarianti*, per i quali l'espressione di stato risulta:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = g(x(k), u(k)) \end{cases} .$$

Sotto l'*ipotesi di linearità* delle funzioni f e g , si ottiene invece:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{cases}$$

e in questo caso si parla di *sistema lineare a tempo discreto*. Se infine si assume che le matrici $A(k), B(k), C(k)$ e $D(k)$ siano costanti nel tempo, abbiamo a che fare con *sistemi lineari e invarianti a tempo discreto*:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} . \quad (2.22)$$

2.2.1 Sistema delle soluzioni

Analogamente al caso di sistemi a tempo continuo, la soluzione di un sistema del tipo (2.22) si ottiene dalla somma di due soluzioni x_L e x_F . $x_L(k)$ è la soluzione con ingresso nullo e condizioni iniziali assegnate

$$x_L : \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) \text{ assegnato} \end{cases} \quad (2.23)$$

mentre $x_F(k)$ è la soluzione con ingresso assegnato e condizioni iniziali nulle

$$x_F = \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ x(0) = 0 \end{cases} . \quad (2.24)$$

È banale riconoscere che

$$x_L(k) = A^k x(0). \quad (2.25)$$

Per induzione si può verificare poi che

$$x_F(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h). \quad (2.26)$$

Infatti

$$\begin{aligned} x_F(k+1) &= \sum_{h=0}^k A^{k-h} B u(h) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h} B u(h) + A^0 B u(k) \\ &= A \left(\underbrace{\sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h)}_{x_F(k)} \right) + B u(k) \end{aligned}$$

il che dimostra $x_F(k+1) = A x_F(k) + B u(k)$. La soluzione completa in termini di stato $x(k)$ risulta essere

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h) \quad (2.27)$$

mentre in termini di uscita $y(t)$ abbiamo

$$y(k) = C A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} C A^{k-h-1} B u(h) + D u(k). \quad (2.28)$$

La successione di matrici

$$W(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 0, \\ D & \text{se } k = 0, \\ C A^{k-h-1} B & \text{se } k > 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

è detta *matrice delle risposte impulsive del sistema*. Ciascun elemento è una matrice $p \times m$ il cui significato è il seguente. Sia $\delta(k-h)$ la successione “impulso”

$$0, 0, 0, 0, 0, \underbrace{1}_{h\text{-esimo}}, 0, 0, 0 \dots$$

allora si ha la seguente

Proprietà: $W_{ij}(k-h-1)$ è l'uscita i all'istante k provocata da un impulso sull'ingresso j all'istante h .

2.2.2 Analisi modale

La matrice A^k che caratterizza la risposta libera è detta *matrice di transizione* ed è calcolabile come un semplice prodotto di matrici ripetuto $k-1$ volte, ma questo calcolo non è interessante per l'analisi del sistema. Per caratterizzare la risposta, anche nel caso discreto, possiamo effettuare una analisi modale.

Caso di A diagonalizzabile

Se A è diagonalizzabile allora si può scrivere

$$\begin{cases} A = T\Lambda T^{-1} \\ \Lambda = T^{-1}AT \end{cases} .$$

Partizionando T per colonne e $S = T^{-1}$ per righe si ha

$$T = [t_1 t_2 \dots t_n], \quad S = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix} .$$

Poiché

$$A^k = \underbrace{T\Lambda T^{-1}T\Lambda T^{-1} \dots T\Lambda T^{-1}}_{k\text{-volte}} = T\Lambda^k T^{-1}, \quad (2.30)$$

si ottiene

$$A^k = [t_1 t_2 \dots t_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix} . \quad (2.31)$$

Definiamo, come fatto in precedenza, le matrici

$$Z_h = t_h s_h^T .$$

dette matrici componenti. Come nel caso continuo, vale la seguente

Proprietà: la matrice di transizione A^k è formata da una sommatoria di matrici costanti Z_h , ciascuna moltiplicata per il modo discreto λ_h^k

$$A^k = \sum_{h=1}^n t_h s_h^T \lambda_h^k = \sum_{h=1}^n Z_h \lambda_h^k . \quad (2.32)$$

Come nel caso continuo si possono distinguere i due casi in cui un autovalore λ è reale o complesso. Nel caso di λ reale, l'andamento del modo λ^k è il seguente (Fig.2.5):

1. se $|\lambda| > 1$ il modo diverge;
2. se $|\lambda| < 1$ il modo converge;
3. se $|\lambda| = 1$ il modo è di ampiezza costante.

Nel caso discreto vale l'ulteriore distinzione:

1. se $\lambda > 0$ il modo è positivo;
2. se $\lambda < 0$ il modo ha segni alterni
3. se $\lambda = 0$ il modo è nullo.

Se l'autovalore è complesso, come fatto in precedenza, possiamo ordinare gli autovalori prendendo i primi r reali e i rimanenti ordinati a coppie

$$\sigma(A) = \left\{ \underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}_{\text{reali}}, \underbrace{\lambda_{r+1}, \lambda_{r+1}^*}_{\text{coniugati}}, \underbrace{\lambda_{r+3}, \lambda_{r+3}^*}_{\text{coniugati}}, \dots, \underbrace{\lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^*}_{\text{coniugati}} \right\}$$

Considerando parte reale e immaginaria di Z_h e l'espressione trigonometrica di λ_h abbiamo

$$\begin{aligned} \lambda_h &= \rho_h e^{j\theta_h} \\ Z_h &= M_h + jN_h. \end{aligned}$$

Dalla formula di Eulero

$$\lambda_h^k = \rho_h^k e^{j\theta_h k} = \rho_h^k [\cos(\theta_h k) + j \sin(\theta_h k)]$$

si ottiene (i calcoli sono semplici)

$$\begin{aligned} A^k &= \sum_{h=1}^r Z_h \lambda_h^k + \\ &+ \sum_{r+1}^{n-1} 2\rho_h^k [M_h \cos(\theta_h k) - N_h \sin(\theta_h k)] \end{aligned}$$

(passo 2)

Si può notare dunque la cosa di fondamentale importanza:

Proprietà: ad una coppia di autovalori complessi λ e λ^* coniugati corrispondono funzioni modali complesse, ma che danno origine a successioni reali del tipo

$$\rho^k \cos(\theta k) \quad \text{e} \quad \rho^k \sin(\theta k).$$

L'andamento del sistema delle soluzioni risulta dunque governato da esponenziali reali associati agli autovalori reali e da oscillazioni convergenti o divergenti. La natura convergente o divergente delle oscillazioni dipende dal modulo dell'autovalore (Figg.2.8, 2.6, 2.7).

1. se $\rho > 1$ l'oscillazione diverge;
2. se $\rho < 1$ l'oscillazione converge;
3. se $\rho = 1$ l'oscillazione è ad ampiezza costante.

La similitudine con il caso continuo è notevole. L'unica differenza è che il modo associato ad un autovalore è smorzato o amplificato diversamente nei due casi.

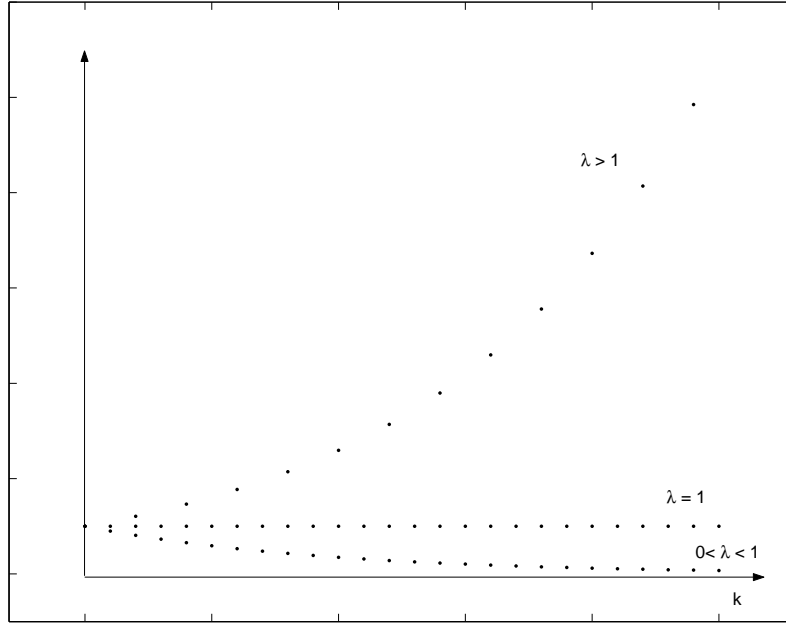


Figura 2.5: λ^k per λ compreso tra 0 e 1, uguale a 1 e maggiore di 1.

Caso di A non diagonalizzabile

Nel caso di matrice di stato A non diagonalizzabile, come nel caso continuo, si può ricorrere alla forma di Jordan

$$A = TJT^{-1}, \quad A^k = TJ^kT^{-1} \quad (2.33)$$

dove

$$J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_s\}$$

è la forma di Jordan associata ad A . La potenza k -esima del singolo blocco può essere scritta come segue

$$\begin{aligned} J_h^k &= (\lambda_h I + J_{h0})^k = \\ &= \lambda_h^k I + \binom{k}{1} \lambda_h^{k-1} J_{h0} + \binom{k}{2} \lambda_h^{k-2} J_{h0}^2 + \dots + \binom{k}{k-1} \lambda_h^1 J_{h0}^{k-1} + J_{h0}^k = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_h^{k-i} J_{h0}^i. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo ricordare che $J_{h0}^k = 0$ per $\forall k \geq \nu_h$ (ν_h è la dimensione del blocco J_{h0}) e che per definizione $\binom{k}{i} = 0$ quando $k < i$. Allora si ha che

$$J_h^k = \sum_{i=0}^{\nu_h-1} \binom{k}{i} \lambda_h^{k-i} J_{h0}^i. \quad (2.34)$$

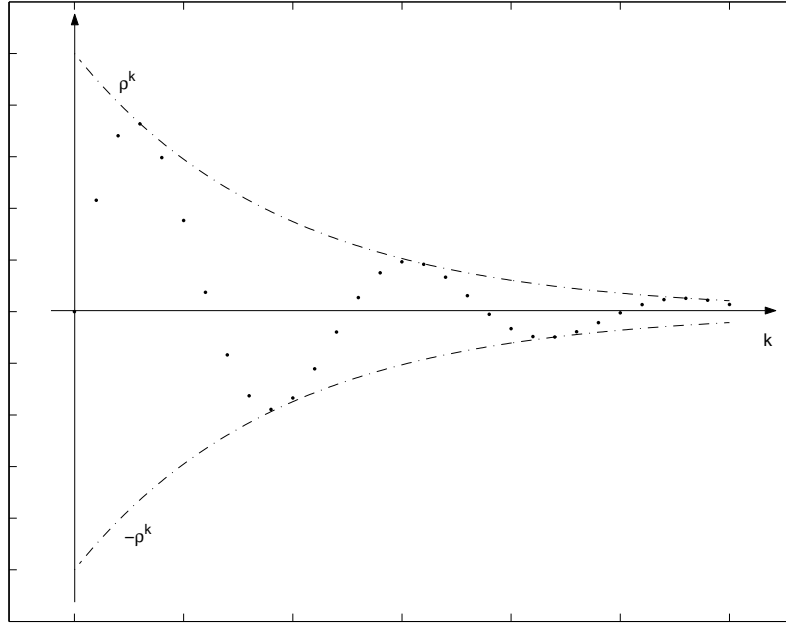


Figura 2.6: $\rho^k \sin(\theta k)$ per $0 < \rho < 1$.

Ora si noti che

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!} \doteq p_i(k), \quad \text{per } k \geq i$$

altro non è, fissato i , che un polinomio in k , per cui si ottiene, in analogia al caso continuo:

$$A^k = \sum_{h=1}^s \sum_{i=0}^{\nu_h-1} Z_h p_i(k) \lambda_h^{k-i}. \quad (2.35)$$

Quindi, nel caso discreto, se esistono blocchi di Jordan di ordine maggiore di uno compaiono delle funzioni modali del tipo

$$\lambda^k, \binom{k}{1} \lambda^{k-1}, \binom{k}{2} \lambda^{k-2}, \dots, \binom{k}{\nu-1} \lambda^{k-\nu+1}$$

dove $\nu = \nu(\lambda)$ è il grado di λ .

2.3 Approssimazione locale di sistemi non lineari

Dato un sistema non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

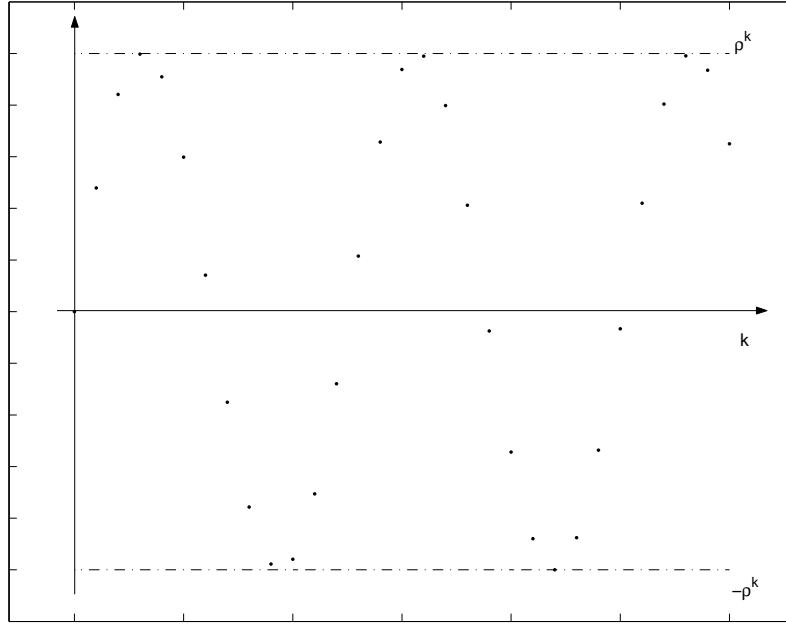


Figura 2.7: $\rho^k \sin(\theta k)$ per $\rho = 1$.

definiamo *coppia di equilibrio* una coppia di vettori (\bar{x}, \bar{u}) dove $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ e $\bar{u} \in \mathfrak{R}^m$ tali che se se assunti come stato iniziale e ingresso costante l'evoluzione dello stato coincide con un vettore costante, ovvero

$$x(0) = \bar{x}, \quad u(t) = \bar{u}, \quad t \geq 0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = \bar{x}, \quad t \geq 0.$$

La condizione di equilibrio è facilmente determinabile. Basta pensare che per definizione, $u(t) \equiv \bar{u}$ e che se $x(t) \equiv \bar{x}$ è una funzione vettoriale costante, allora la sua derivata è nulla. Quindi $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ diventa

$$0 = f(\bar{x}, \bar{u}). \tag{2.36}$$

Analogamente, se è data una trasformazione di uscita,

$$y(t) = g(x(t), u(t)).$$

Allora dicesi *uscita di equilibrio* associata alla coppia (\bar{x}, \bar{u}) il vettore

$$\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}).$$

Sfruttando la stessa idea dell'approssimante lineare di una funzione è possibile ottenere una approssimazione lineare del sistema non lineare valida in un intorno del punto di equilibrio. Applichiamo le traslazioni

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) - \bar{x} \\ v(t) &= u(t) - \bar{u} \\ w(t) &= y(t) - \bar{y}. \end{aligned}$$

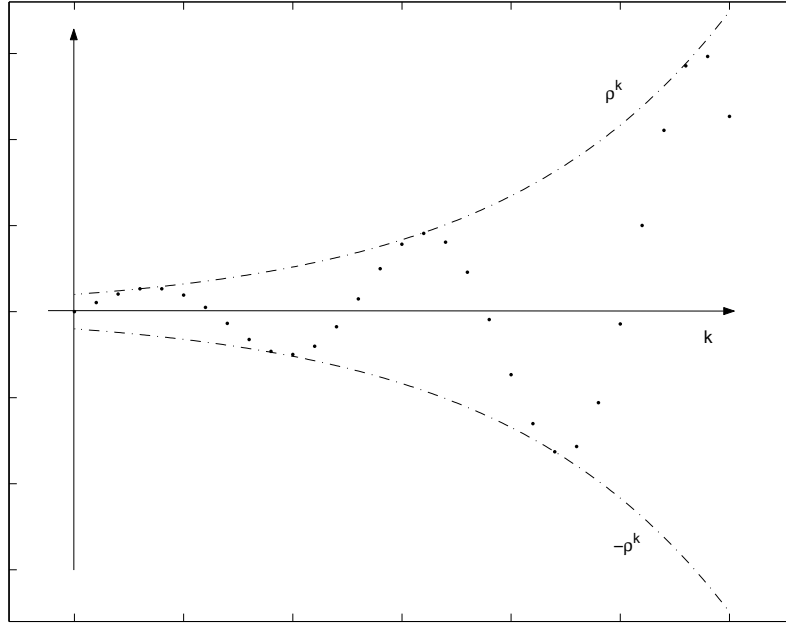


Figura 2.8: $\rho^k \sin(\theta k)$ per $\rho > 1$.

Sotto l'ipotesi di differenziabilità delle funzioni f e g il sistema approssimante lineare nel punto di equilibrio è

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + B_{\bar{x}, \bar{u}} v(t) \\ w(t) &= C_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + D_{\bar{x}, \bar{u}} v(t)\end{aligned}$$

dove le matrici $A_{\bar{x}, \bar{u}}$, $B_{\bar{x}, \bar{u}}$, $C_{\bar{x}, \bar{u}}$ e $D_{\bar{x}, \bar{u}}$ di dimensione $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ e $p \times m$ rispettivamente, sono matrici le cui componenti sono date dalle derivate parziali di f e g rispetto alle componenti di x e u secondo le seguenti formule

$$\begin{aligned}[A_{\bar{x}, \bar{u}}]_{ij} &= \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \\ [B_{\bar{x}, \bar{u}}]_{ij} &= \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \\ [C_{\bar{x}, \bar{u}}]_{ij} &= \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \\ [D_{\bar{x}, \bar{u}}]_{ij} &= \left. \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}\end{aligned}$$

Quello della linearizzazione è uno strumento formidabile in quanto permette di descrivere, con una approssimazione, le traiettorie di un sistema non

lineare attraverso quelle di un sistema lineare, che come visto sono calcolabili esplicitamente.

Nel caso a tempo discreto disponiamo di uno strumento analogo. La sola differenza è che la condizione di equilibrio diventa

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x} \quad (2.37)$$

e l'approssimante lineare è ovviamente un sistema discreto

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_{\bar{x}, \bar{u}} z(k) + B_{\bar{x}, \bar{u}} v(k) \\ w(k) &= C_{\bar{x}, \bar{u}} z(k) + D_{\bar{x}, \bar{u}} v(k) \end{aligned}$$

le cui matrici si calcolano come visto sopra.

Capitolo 3

Stabilità nei sistemi lineari

L'analisi della stabilità è il primo capitolo e probabilmente il più importante di tutta l'analisi dei sistemi dinamici. A questo argomento sono stati dedicati numerosissimi libri, trattati e articoli scientifici. Genericamente parlando, l'analisi della stabilità di un sistema che è soggetto ad una certa evoluzione “nominale” consiste nel chiedersi come cambi il comportamento del sistema stesso una volta intervenute delle “piccole” perturbazioni. In breve diremo che un sistema ha un comportamento instabile se perturbazioni arbitrariamente piccole possono fare variare “considerevolmente” la risposta. Un comportamento stabile invece prevede che a perturbazioni sufficientemente piccole corrisponda un comportamento prossimo a quello nominale.

In questo capitolo studieremo la stabilità dei sistemi lineari, che come vedremo porta a delle tecniche molto efficaci quali l'analisi degli autovalori. È fondamentale precisare che il caso dei sistemi lineari è particolare. Nel caso dei sistemi lineari, come vedremo è possibile parlare di stabilità come caratteristica del sistema. Come si vedrà nel seguito, nel caso di sistemi non-lineari la stabilità è una proprietà che dipende non solo da sistema ma dalle condizioni del sistema. In particolare, quando si parla di stabilità di una situazione (stato) di equilibrio, questa può essere verificata o meno a seconda del punto di equilibrio prescelto. Si pensi ad esempio al sistema pendolo. Come noto tale sistema ha due punti di equilibrio (quando il centro di massa è sulla verticale della cerniera). L'esperienza ci insegna che la posizione di equilibrio superiore (quando la massa è sopra la cerniera) è instabile, mentre la posizione di equilibrio inferiore (quando la massa è sotto la cerniera). Questo avviene anche se l'equazione differenziale (non-lineare) che governa il pendolo è valida in qualunque configurazione.

Nel caso di sistemi lineari la stabilità è una proprietà intrinseca *del sistema* e non dipende dall'equilibrio scelto.

3.1 Sistemi a tempo continuo

Consideriamo il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (3.1)$$

Supponiamo che sia assegnato un ingresso “noninale” $\bar{u}(\cdot)$ e una condizione iniziale “nominale” $\bar{x}(0)$ ai quali corrisponda la soluzione nominale $\bar{x}(t)$.

Nella definizione di stabilità noi seguiremo l'impostazione di Lyapunov e considereremo perturbazioni sulle condizioni iniziali. Se a parità di ingresso $\bar{u}(\cdot)$ si perturba la condizione iniziale che diventa $x(0) = \bar{x}(0) + \Delta x(0)$, allora si ottiene una soluzione perturbata $x(t)$. Come già accennato, lo studio della stabilità si propone di indagare come la soluzione perturbata si discosta da quella nominale. Quindi si tratta di considerare la differenza tra le due soluzioni

$$z(t) \doteq x(t) - \bar{x}(t). \quad (3.2)$$

Tenuto conto che entrambe le soluzioni $x(t)$ e $\bar{x}(t)$ soddisfano l'equazione (3.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\bar{u}(t), \quad \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

si ottiene facilmente, sottraendo la seconda relazione dalla prima, che il sistema dinamico che descrive l'andamento di $z(t)$ è

$$\dot{z}(t) = Az(t) \quad (3.3)$$

quindi la variabile $z(t)$ evolve in risposta libera e la sua dinamica è determinata dalla matrice A . Ciò significa che se consideriamo perturbazioni sulle condizioni iniziali la stabilità del sistema (3.1) non dipende dall'ingresso nominale $\bar{u}(t)$ ¹. Possiamo dunque affermare che la stabilità è una proprietà del sistema (3.1) (ovvero del sistema (3.3)) e introdurre la seguente definizione

Definizione Il sistema è detto *stabile* se, dato $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$\|z(0)\| \leq \delta \implies \|z(t)\| \leq \varepsilon \forall t > 0.$$

In breve l'idea è la seguente: per ogni valore ε che noi siamo disposti a tollerare sulla quantità $\|x(t) - \bar{x}(t)\|$ deve esistere un valore limite δ da imporre alla quantità $\|x(0) - \bar{x}(0)\|$ che permette che tale condizione si realizzi. Una nozione più forte e utile nella pratica ingegneristica è quella di stabilità asintotica.

Definizione Il sistema è detto *asintoticamente stabile* se è stabile e inoltre esiste $\delta' > 0$ tale che per $\|z(0)\| \leq \delta'$ $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

¹in altre parole possiamo sempre considerare la stabilità della soluzione nulla con ingresso nullo

Definizione Il sistema è detto *marginalmente stabile* se è stabile ma non lo è asintoticamente.

Definizione Il sistema è detto *instabile* se non è stabile.

Per studiare la stabilità del sistema, consideriamo l'espressione generale della risposta libera

$$z(t) = e^{At} z(0) = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{\nu_k-1} Z_{ki} t^i e^{\lambda_k t} z(0). \quad (3.4)$$

Nel caso più generale un autovalore complesso può essere scritto nella forma $\lambda = \xi + j\omega$, da cui il generico modo è

$$t^h e^{\lambda t} = t^h e^{\xi t} (\cos \omega t + j \sin \omega t).$$

Per studiare la convergenza a zero o la divergenza del generico modo consideriamo il suo modulo

$$|t^h e^{\lambda t}| = t^h e^{\xi t} \underbrace{|\cos \omega t + j \sin \omega t|}_{=1} = t^h e^{\xi t}. \quad (3.5)$$

Quindi abbiamo la proprietà che la divergenza o la convergenza di un modo non dipende dalla parte immaginaria dell'autovalore. A seconda che la parte reale dell'autovalore sia positiva, negativa o nulla si danno i seguenti casi.

- Se $\xi > 0$ allora $|t^h e^{\lambda t}| \rightarrow \infty$, il modo diverge.
- Se $\xi < 0$ allora $|t^h e^{\lambda t}| \rightarrow 0$, il modo converge.
- Se $\xi = 0$ segue che $|t^h e^{\lambda t}| = |t^h|$ e dunque dobbiamo ulteriormente distinguere due casi
 - Se $h \geq 1$ il modo diverge
 - Se $h = 0$ il modo ha ampiezza costante.

Ora dobbiamo considerare che per avere convergenza a 0 di $z(t)$ *tutti i modi* devono convergere e per avere limitatezza della soluzione *tutti i modi* devono essere limitati. Ne derivano le considerazioni che seguono.

3.1.1 Criteri di stabilità

Siccome il comportamento della soluzione dipende dai modi i quali dipendono dagli autovalori di A ed, eventualmente, dalla sua forma di Jordan possiamo dedurre il seguente criterio di stabilità per il sistema (3.1). Detto $\sigma(A)$ l'insieme degli autovalori di A :

- Il sistema è stabile $\iff \forall \lambda_i \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ e, nel caso in cui $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, si ha $\nu(\lambda_i) = 1$ (cioè se la parte reale di un autovalore è nulla, non ci devono essere blocchi di Jordan di ordine superiore a uno associati a quell'autovalore).
- Il sistema è instabile $\iff \exists \lambda_i \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ o $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ e $\nu(\lambda_i) > 1$.
- Il sistema è asintoticamente stabile $\iff \forall \lambda_i \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$.
- Il sistema è marginalmente stabile \iff il sistema è stabile e $\exists \lambda_i \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ e $\nu(\lambda_i) = 1$.

3.2 Sistemi a tempo discreto

Si suppone che dato un ingresso $u(\cdot)$ e una condizione iniziale $x(0)$ il sistema

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.6)$$

abbia una soluzione nominale $\bar{x}(k)$. Se a parità di ingresso $u(\cdot)$ si perturba la condizione iniziale che diventa $x(0)$, si ottiene una soluzione perturbata $x(k)$. Anche qui – come nel caso continuo – l'interesse è quello di studiare l'evoluzione della differenza tra le due soluzioni

$$z(k) \doteq x(k) - \bar{x}(k) \quad (3.7)$$

che è descritta dal sistema

$$z(k+1) = Az(k). \quad (3.8)$$

Le definizioni di stabilità semplice e asintotica e di instabilità sono identiche a quelle viste per i sistemi continui. Per studiare la stabilità del sistema si deve studiare la soluzione libera

$$z(k) = A^k z(0) = \sum_{h=1}^s \sum_{i=0}^{\nu_h-1} Z_{hi} \binom{k}{i} \lambda_h^{k-i}. \quad (3.9)$$

Ponendo $P_i(k) \doteq \binom{k}{i}$ (ricordiamo che per $k < 1$ si ha per definizione $\binom{k}{i} = 0$) consideriamo il modulo del generico modo

$$|P_i(k)\lambda^{k-i}| = |P_i(k)||\lambda|^{k-i}. \quad (3.10)$$

Allora possiamo fare le seguenti considerazioni.

- Se $|\lambda| > 1$ allora $|P_i(k)\lambda^{k-i}| \rightarrow \infty$, quindi il modo diverge.
- Se $|\lambda| < 1$ allora $|P_i(k)\lambda^{k-i}| \rightarrow 0$, quindi il modo converge.

- Se $|\lambda| = 1$ si ha $|P_i(k)\lambda^{k-i}| = |P_i(k)|$ e dobbiamo ulteriormente distinguere due casi
 - Se $i \geq 1$ il modo diverge.
 - Se $i = 0$ il modo ha ampiezza costante.

Analogamente al caso dei sistemi a tempo continuo, possiamo dedurre i seguenti criteri di stabilità per il sistema (3.1).

3.2.1 Criteri di stabilità

- Il sistema è stabile $\iff \forall \lambda_i \in \sigma(A) \quad |\lambda_i| \leq 1$ e, nel caso in cui $|\lambda_i| = 1$, allora $\nu(\lambda_i) = 1$ (cioè se il modulo di un autovalore è pari a uno, non ci devono essere blocchi di Jordan di ordine superiore a uno associati a quell'autovalore).
- Il sistema è instabile $\iff \exists \lambda_i \in \sigma(A) : |\lambda_i| > 1$ oppure $\exists \lambda_i \in \sigma(A) : |\lambda_i| = 1$ e $\nu(\lambda_i) > 1$.
- Il sistema è asintoticamente stabile $\iff \forall \lambda_i \in \sigma(A) : |\lambda_i| < 1$.
- Il sistema è marginalmente stabile \iff il sistema è stabile e $\exists \lambda_i \in \sigma(A) : |\lambda_i| = 1$ e $\nu(\lambda_i) = 1$.

3.3 Regioni di stabilità

La stabilità dei sistemi lineari è uno dei capitoli più importanti di tutta la teoria dei controlli, non solo per l'importanza del problema stesso ma per le sue implicazioni nello studio dei sistemi non lineari tramite linearizzazione.

Per quanto abbiamo visto la regione di stabilità per sistemi a tempo continuo è il semipiano sinistro del piano complesso Fig. 3.3 (a). Per avere la stabilità asintotica è necessario che tutti gli autovalori di A siano contenuti nel semipiano sinistro aperto (cioè escluso l'asse immaginario) . Per la stabilità semplice invece basta che gli autovalori siano inclusi nel semipiano sinistro chiuso, ma per ogni autovalore sull'asse immaginario occorre un supplemento di indagine dovendo il suo grado essere uguale a 1.

Per i sistemi discreti vale il medesimo discorso a parte il fatto che la regione di stabilità diventa il disco unitario Fig. 3.3 (b).

Ci possono essere ulteriori regioni di stabilità che hanno interesse nella pratica. Una di queste è

$$\{s : \Re(s) \leq -\mu\}$$

con μ parametro positivo. L'appartenenza degli autovalori a questa regione garantisce che i modi convergano con velocità non inferiore a quella della funzione

$$e^{-\mu t}.$$

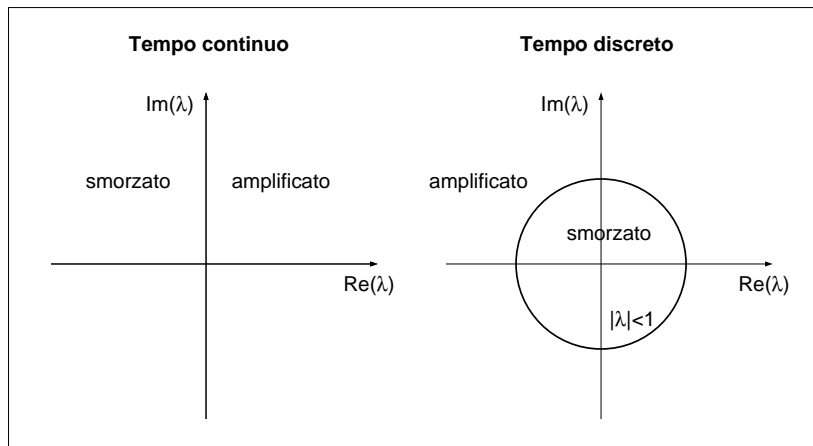


Figura 3.1: Confronto fra le regioni di stabilità: (a) per sistemi a tempo continuo (a sinistra) e (b) tempo discreto (a destra).

Altra regione di interesse è la regione di “smorzamento garantito” del tipo

$$\{s : \Re(s) \leq -\nu|\Im(s)|\}$$

che implica che i modi oscillanti ad alta frequenza abbiano uno smorzamento elevato.

3.4 Criterio di Routh–Hurwitz

Esiste un criterio molto interessante per stabilire la stabilità asintotica di un sistema a tempo continuo senza calcolarne gli autovalori, ma sulla base della sola conoscenza del polinomio caratteristico della matrice di stato A . Consideriamo il seguente polinomio

$$p(s) = p_0s^n + p_1s^{n-1} + \dots + p_{n-1}s + p_n$$

dove, per comodità, gli indici sono stati invertiti. Cominciamo a considerare la semplice condizione necessaria.

Condizione necessaria: Affinché $p(s)$ abbia radici a parte reale negativa è necessario che tutti i coefficienti p_i abbiano lo stesso segno. La condizione è anche sufficiente per polinomi del secondo ordine.

Per ottenere una condizione necessaria e sufficiente, costruiamo una tabella, inizializzandola come segue

$$\begin{array}{ccccccc} p_0 & p_2 & p_4 & p_6 & \dots & & \\ p_1 & p_3 & p_5 & p_7 & \dots & & \end{array}$$

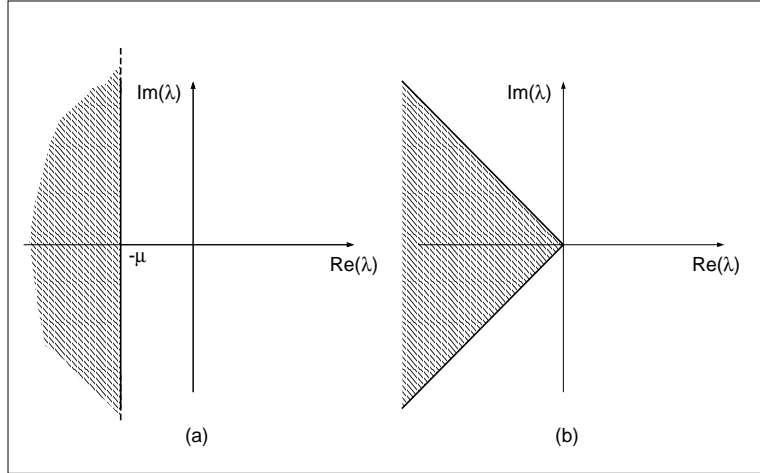


Figura 3.2: La regione $\{s : \Re(s) \leq -\mu\}$ (a) e la regione $\{s : \Re(s) \leq -\nu|\Im(s)|\}$, con $\nu = 1$ (b).

Poi aggiungiamo righe (eventualmente con parte degli elementi nulli) secondo la seguente regola. Ad ogni iterazione consideriamo le ultime due righe calcolate e chiamiamo α_i e β_i i loro elementi. Generiamo una nuova riga in questo modo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 & & \alpha_4 & & \dots \\
 \beta_1 & & \beta_2 & & \beta_3 & & \beta_4 & & \dots \\
 \frac{\beta_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1} & & \frac{\beta_1\alpha_3 - \beta_3\alpha_1}{\beta_1} & & \frac{\beta_1\alpha_4 - \beta_4\alpha_1}{\beta_1} & & \frac{\beta_1\alpha_5 - \beta_5\alpha_1}{\beta_1} & & \dots
 \end{array}$$

(è facile ricordare la regola perché comporta il calcolo degli opposti di determinanti di opportune matrici 2×2). Assumendo che i coefficienti β_1 siano non nulli questa generazione iterativa crea una tabella di $n + 1$ righe (perché da un certo punto in poi le righe diventano nulle). Si ha il seguente criterio.

Criterio di Routh–Hurwitz: Condizione necessaria e sufficiente affinché $p(s)$ abbia radici a parte reale negativa è che tutti i coefficienti relativi alla prima colonna della tabella abbiano lo stesso segno. Nel caso in cui questo non accada, il numero di variazioni di segno corrisponde al numero di radici a parte reale positiva.

La costruzione della tabella può incepparsi se alcuni dei coefficienti della prima colonna sono nulli. In questo caso

- possiamo escludere la stabilità asintotica.
- possiamo proseguire nella costruzione della tabella sostituendo al termine nullo un numero piccolo ϵ .

Esempi

La tabella relativa al polinomio

$$p(s) = s^4 + 5s^3 + 13s^2 + 19s + 10$$

è la seguente

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 13 & 10 \\ 5 & 19 & 0 \\ \hline \frac{46}{5} & 10 & 0 \\ \frac{312}{23} & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Poiché gli elementi della prima colonna sono concordi, tutte le radici del polinomio hanno parte reale negativa. Il polinomio può infatti essere scritto nella forma

$$p(s) = (s + 1)(s + 2)(s^2 + 2s + 5),$$

da cui si vede che le radici sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ e una coppia di radici complesse coniugate (gli zeri del polinomio di secondo grado) la cui parte reale è negativa (i coefficienti hanno lo stesso segno).

La tabella relativa al polinomio

$$p(s) = s^4 + s^3 + s^2 + 11s + 10$$

è la seguente

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 11 & 0 \\ -10 & 10 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Poiché gli elementi della prima colonna non sono concordi, vi sono radici a parte reale positiva. Il numero di tali radici è due (cioè il numero di variazioni di segno lungo la prima colonna). Si verifica facilmente che il polinomio può essere scritto nella forma

$$p(s) = (s + 1)(s + 2)(s^2 - 2s + 5).$$

3.5 Analisi di stabilità in punti di equilibrio di sistemi non lineari

Diamo ora solo un brevissimo cenno di come gli strumenti per l'analisi della stabilità di sistemi lineari possano essere impiegati per l'analisi della stabilità di sistemi non-lineari in un punto di equilibrio. La definizione di stabilità di sistemi in un punto di equilibrio, anche se non ancora introdotta

formalmente è analoga a quella precedentemente riportata. Come già detto, dato un sistema non lineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (NL)$$

che ammette la condizione di equilibrio

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0,$$

possiamo associargli il modello lineare

$$\dot{z}(t) = A_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) + B_{\bar{x}, \bar{u}} v(t)$$

dove $z(t) = x(t) - \bar{x}$ e $v(t) = u(t) - \bar{u}$ (si noti che in questo caso abbiamo scelto come traiettorie nominali delle costanti $\bar{x}(t) = \bar{x}$ e $\bar{u}(t) = \bar{u}$). Siccome nell'analisi di stabilità manteniamo l'ingresso pari a quello nominale $u(t) = \bar{u}$, possiamo porre

$$v(t) \equiv 0$$

e considerare il modello lineare

$$\dot{z}(t) = A_{\bar{x}, \bar{u}} z(t) \quad (L)$$

Si può dimostrare che la stabilità asintotica del sistema (L) (ovvero il fatto che $A_{\bar{x}, \bar{u}}$ abbia autovalori a parte reale negativa) implica la stabilità asintotica del sistema (NL) *nel punto di equilibrio* (\bar{x}, \bar{u}) . Si può anche dimostrare che l'instabilità esponenziale del sistema (L) (ovvero il fatto che $A_{\bar{x}, \bar{u}}$ abbia qualche autovalore a parte reale positiva) implica l'instabilità del sistema (NL) *nel punto di equilibrio* (\bar{x}, \bar{u}) .

Nel caso in cui $A_{\bar{x}, \bar{u}}$ abbia alcuni autovalori a parte reale nulla e gli altri negativi, nulla si può dedurre teoricamente dal modello lineare. Nella pratica la presenza di autovalori a parte reale nulla è inaccettabile. Perturbazioni infinitesime potrebbero spostare questi autovalori nel semipiano positivo provocando instabilità.

Il seguente ulteriore aspetto è anche importante. La proprietà di stabilità è intrinseca di un sistema lineare mentre non lo è nel caso di un sistema non lineare, in quanto questa dipende dal punto di equilibrio. Dunque ogni punto di equilibrio è associato ad un proprio approssimante lineare (come nel seguente esempio) la cui stabilità garantisce la stabilità del sistema non lineare ma solamente in quel punto di equilibrio..

Esempio Consideriamo l'equazione del pendolo

$$\ddot{\theta}(t) = -\alpha \sin(\theta(t)) - \beta \dot{\theta}(t) + u(t)$$

equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\alpha \sin(x_1(t)) - \beta x_2(t) + u(t) \end{aligned}$$

dove $x_1(t) = \theta(t)$ è la posizione angolare, mentre $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ è la velocità angolare. I coefficienti α e β sono positivi. Fissato l'angolo $\bar{x}_1 = \bar{\theta}$ come parametro le condizioni di equilibrio sono $\bar{x}_2 = 0$ e $\bar{u} = \alpha \sin(\bar{x}_1)$. Si noti che i valori $\bar{\theta} = 0 + k2\pi$ corrispondono alla la posizione verticale “bassa” mentre $\bar{\theta} = \pi + k2\pi$ corrispondono alla posizione verticale “alta”. Il sistema linearizzato ci fornisce le matrici

$$A_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \cos(\bar{\theta}) & -\beta \end{bmatrix}, \quad B_{\bar{x}, \bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$\det(sI - A) = s^2 + \beta s + \alpha \cos(\bar{\theta})$$

Essendo un polinomio del secondo ordine la stabilità è garantita dalla positività dei coefficienti, quindi, poiché $\alpha > 0$, $\beta > 0$, la condizione di stabilità asintotica del punto di equilibrio associato al valore $\bar{\theta}$ è

$$\cos(\bar{\theta}) > 0.$$

Possiamo trarre le seguenti conclusioni. Per posizioni di equilibrio basse, fino alla posizione orizzontale esclusa, parametrizzate dai valori di $\bar{\theta}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \bar{\theta} \leq \frac{\pi}{2}$$

il sistema ha comportamento stabile.

Per posizioni di equilibrio alte, fino alla orizzontale esclusa, parametrizzate dai valori di θ

$$\frac{\pi}{2} \leq \bar{\theta} \leq \frac{3\pi}{2}$$

il sistema ha comportamento instabile. Nella posizione orizzontale la linearizzazione non dà risposta (ci sono due radici, 0 e $-\beta$). In questo caso, si può dimostrare (con metodi più avanzati della linearizzazione) che la posizione di equilibrio orizzontale è stabile.

Chi abbia voglia di verificare sperimentalmente queste conclusioni, può considerare il fatto che le equazioni proposte riproducono per α e β opportuni, con buona fedeltà, il sistema riportato in Figura 3.5 in cui un peso attaccato ad una puleggia bilancia un braccio mobile con un peso alla sommità.

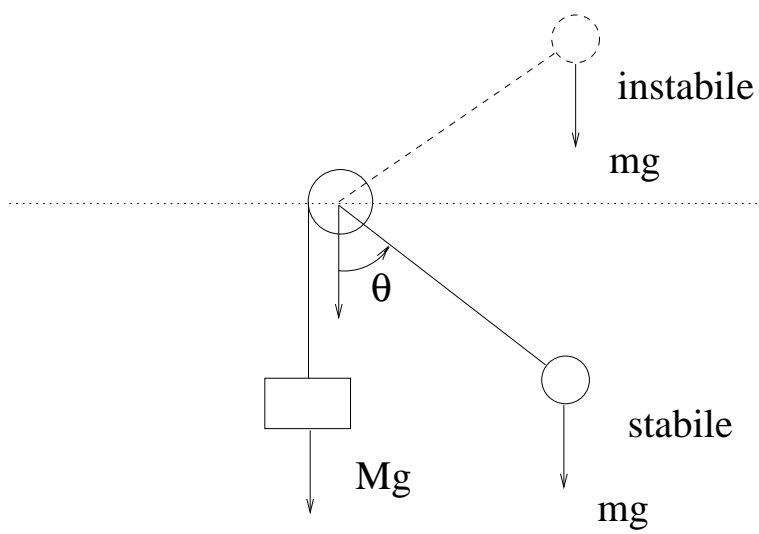


Figura 3.3: Sistema “bilancia”

Capitolo 4

Funzioni di trasferimento

Uno strumento di rappresentazione di un sistema lineare invariante che risulterà di fondamentale utilità è la cosiddetta matrice delle funzioni di trasferimento. Tale matrice è ottenuta trasformando le equazioni del sistema secondo Laplace. Ponendo le condizioni iniziali a zero, abbiamo che ad ogni ingresso $u(s)$ corrisponde una unica uscita (forzata) $y(s)$. La matrice delle funzioni di trasferimento è l'operatore lineare che rappresenta il rapporto ingresso-uscita ed altro non è che l'operatore trasformato dell'integrale di convoluzione. Un aspetto fondamentale è che la matrice delle funzioni di trasferimento, pur esprimendo la risposta forzata del sistema, conserva le informazioni sui modi del sistema in quanto gli autovalori della matrice di stato del sistema risultano essere i punti di singolarità (poli) della matrice delle funzioni di trasferimento.

4.1 Definizione di funzione di trasferimento

Consideriamo un sistema lineare invariante a tempo continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

e trasformiamo secondo Laplace entrambi i membri ottenendo

$$\begin{aligned}sx(s) - x(0) &= Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s)\end{aligned}$$

Dalla prima, un semplice calcolo permette di ricavare la seguente espressione

$$x(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}x(0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}Bu(s)}_{\text{risposta forzata}}.$$

dove sono riconoscibili la parte libera e la parte forzata della risposta. Confrontando l'espressione con quella precedentemente trovata per $x(t)$ vediamo

che i due termini sono le trasformate delle espressioni della risposta libera e di quella forzata, cioè

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1}x(0) &= \mathcal{L} \left[e^{At}x(0) \right] \\ (sI - A)^{-1}Bu(s) &= \mathcal{L} \left[\int_0^t e^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma \right].\end{aligned}$$

In particolare, la matrice

$$(sI - A)^{-1} = \mathcal{L} \left[e^{At} \right]$$

è la trasformata della matrice esponenziale (questo fatto può tornare comodo per calcolare e^{At} in casi semplici).

Eliminando $x(s)$ otteniamo la risposta dell'uscita di un sistema lineare invariante con ingresso $u(s)$ e condizioni iniziali $x(0)$

$$y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1}x(0)}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1}Bu(s) + Du(s)}_{\text{risposta forzata}}. \quad (4.1)$$

Assumiamo ora che le condizioni iniziali siano nulle $x(0) = 0$. Tale assunzione è restrittiva ma, come vedremo, non comporta gravi perdite di informazione sul comportamento generale per $x(0)$ generico. Allora si ha che

$$y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] u(s). \quad (4.2)$$

Il termine

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è una matrice di dimensioni $p \times q$ essendo $y(s)$ e $u(s)$ vettori di dimensione p e q . $W(s)$ è una matrice di funzioni della variabile complessa s ed è detta *matrice delle funzioni di trasferimento*. Per capire di che tipo di funzioni si tratta, consideriamo la matrice $(sI - A)^{-1}$. Usando la nota regola per la inversione delle matrici, abbiamo che

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{p(s)} \begin{bmatrix} \Delta_{11}(s) & \Delta_{12}(s) & \dots & \Delta_{1n}(s) \\ \Delta_{21}(s) & \Delta_{22}(s) & \dots & \Delta_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{n1}(s) & \Delta_{n2}(s) & \dots & \Delta_{nn}(s) \end{bmatrix}$$

dove $p(s) = \det(sI - A)$ è il polinomio caratteristico di A e $\Delta_{ij}(s)$ è il determinante della matrice che si ottiene sopprimendo la colonna i e la riga j della matrice

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & s - a_{nn} \end{bmatrix}$$

moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. Non è difficile rendersi conto che, eliminando una riga e una colonna di $(sI - A)$, necessariamente eliminiamo almeno uno dei termini diagonali $s - a_{ii}$. Di conseguenza, il generico termine $\Delta_{ij}(s)$ è un polinomio di grado $< n$. Quindi il generico termine della matrice $(sI - A)^{-1}$

$$[(sI - A)^{-1}]_{ij} = \frac{\Delta_{ij}(s)}{p(s)} \quad (4.3)$$

è una funzione razionale strettamente propria¹.

Esempio Consideriamo il sistema con $n = 2$, $q = 1$ e $p = 2$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo che

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}}{s^2 + 3s + 3} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+3s+3} & \frac{-1}{s^2+3s+3} \\ \frac{-1}{s^2+3s+3} & \frac{s+2}{s^2+3s+3} \end{bmatrix},$$

dunque la matrice delle funzioni di trasferimento risulta

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 3} \begin{bmatrix} -(s+3) \\ (s+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(s+3)}{s^2+3s+3} \\ \frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+3} \end{bmatrix}.$$

Esiste una formula che permette di calcolare la matrice dei numeratori. Scriviamo

$$W(s) = \frac{N(s)}{p(s)}$$

dove, $p(s) = \det(sI - A)$ è il polinomio caratteristico di A e $N(s)$ è una matrice $p \times q$ di polinomi (di grado $\leq n$). Allora l'elemento ij di $N(s)$ si calcola come determinante di una matrice composta di dimensioni $(n+1) \times (n+1)$ ovvero

$$N_{ij}(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B_j \\ C_i & D_{ij} \end{bmatrix}$$

dove C_i è la i -esima riga di C mentre B_j è la j -esima colonna di B . Nel nostro esempio è immediato verificare:

$$N_{11}(s) = \det \begin{bmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -1 & s+1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad N_{21}(s) = \det \begin{bmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -1 & s+1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

¹una funzione razionale $n(s)/d(s)$ si dice propria se $gr\{n(s)\} \leq gr\{d(s)\}$, si dice strettamente propria se $gr\{n(s)\} < gr\{d(s)\}$, impropria se $gr\{n(s)\} > gr\{d(s)\}$

La matrice delle funzioni di trasferimento è comunque propria ed è strettamente propria (ovvero tutti i suoi elementi sono funzioni razionali strettamente proprie) *se e solo se* $D = 0$. Nell'esempio questo non succede poiché $D_{21} = 1 \neq 0$.

Nel caso di sistemi ad un ingresso e una uscita, la matrice delle funzioni di trasferimento è formata da una singola funzione ed è detta semplicemente *funzione di trasferimento*.

La matrice delle funzioni di trasferimento dà diverse informazioni di fondamentale importanza. Innanzitutto osserviamo che la matrice delle funzioni di trasferimento è la trasformata della matrice delle risposte impulsive. Se per semplicità assumiamo $D = 0$, ricordando che $(sI - A)^{-1} = \mathcal{L} [e^{At}]$ e che la trasformata di Laplace è un operatore lineare, abbiamo che

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \mathcal{L} [Ce^{At}B] = \mathcal{L} [W(t)].$$

Il generico termine $W_{ij}(t)$ rappresenta la risposta dell'uscita i in seguito ad un impulso sull'ingresso j . Dunque $W_{ij}(s)$ rappresenta il rapporto tra l'ingresso j e l'uscita i . Precisamente, consideriamo l'ingresso $u_j(t)$ solamente (ponendo a zero tutti gli altri) ed esaminiamo l'uscita i . Allora

$$y_i(t) = \int_0^t W_{ij}(t - \sigma)u_j(\sigma)d\sigma.$$

Tale relazione se trasformata diventa semplicemente

$$y_i(s) = W_{ij}(s)u_j(s).$$

Un'altra proprietà fondamentale è la seguente. Come già detto la funzione di trasferimento permette di rappresentare il legame ingresso-uscita del sistema. In realtà la risposta completa del sistema è data dalla (4.1). In molti problemi pratici, le condizioni iniziali del sistema non sono note in fase di analisi quindi è abbastanza tipico porre $x(0) = 0$. Questa assunzione implica che la risposta libera non viene tenuta in considerazione. Ma questo non vuol dire che le informazioni sulla risposta libera vengono perse completamente. Infatti la risposta libera è, nel caso di autovalori distinti,

$$y(t) = Ce^{At}x(0) = \sum_{i=1}^n CZ_i e^{\lambda_i t} x(0) = \sum_{i=1}^n l_i(x(0)) e^{\lambda_i t}$$

dove i termini $l_i(x(0)) = CZ_i x(0)$ sono vettori di dimensione p , funzioni delle condizioni iniziali, mentre $e^{\lambda_i t}$ sono i modi del sistema. Il denominatore della funzione di trasferimento è $p(s)$, il polinomio caratteristico di A , le cui radici sono $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ dunque *l'informazione relativa ai modi del sistema, da cui soltanto dipende la risposta libera, è presente anche nella funzione di trasferimento*.

Definizione. I punti del piano complesso che sono singolarità di $W(s)$, ovvero le radici del denominatore, vengono detti *poli della funzione di trasferimento*. Se la funzione di trasferimento è ricavata da un sistema (A, B, C, D) i poli coincidono con gli autovalori della matrice A (a meno di cancellazioni fra numeratore e denominatore che esamineremo presto).

4.2 La risposta ad un ingresso canonico

Per proseguire nel nostro studio sulla funzione di trasferimento, consideriamo ora la risposta forzata (ovvero con $x(0) = 0$) di un sistema ad un ingresso e una uscita ($m = p = 1$) al seguente ingresso test

$$u_\sigma(t) = e^{\sigma t}, \quad t \geq 0,$$

dove σ è un parametro complesso. Assumiamo che il sistema sia rappresentato dalla funzione di trasferimento

$$F(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

e per semplicità assumiamo $D = 0$ e assumiamo anche che σ non appartenga all'insieme degli autovalori di A . L'ingresso test $e^{\sigma t}$ permette di trattare alla stessa maniera ingressi diversi, a seconda della scelta del parametro σ . Per $\sigma = 0$, $u_\sigma(t)$ è la funzione a gradino. Per $\sigma = j\omega$, abbiamo che

$$u_{j\omega}(t) = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

ha parte reale ed immaginaria pari alle funzioni seno e coseno, ingressi tipici dello studio in frequenza del sistema. Passando alle trasformate abbiamo che

$$u_\sigma(s) = \frac{1}{s - \sigma}.$$

La corrispondente risposta forzata è allora

$$y_\sigma(s) = F(s) \frac{1}{s - \sigma}.$$

Ricordando l'espressione di $F(s)$ aggiungiamo e togliamo il termine $F(\sigma)/(s - \sigma)$ ottenendo

$$\begin{aligned} y_\sigma(s) &= F(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + [C(sI - A)^{-1}B - C(\sigma I - A)^{-1}B] \frac{1}{s - \sigma} \\ &= F(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + C[(sI - A)^{-1} - (\sigma I - A)^{-1}]B \frac{1}{s - \sigma} \\ &= F(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + C[(sI - A)^{-1}(\sigma I - A)(\sigma I - A)^{-1} + \\ &\quad - (sI - A)^{-1}(sI - A)(\sigma I - A)^{-1}]B \frac{1}{s - \sigma} = F(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C(sI - A)^{-1}[(\sigma I - A) - (sI - A)](\sigma I - A)^{-1}B \frac{1}{s - \sigma} \\
& = F(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + C(sI - A)^{-1}[(\sigma - s)I](\sigma I - A)^{-1}B \frac{1}{s - \sigma} \\
& = F(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + C(sI - A)^{-1}\tilde{B}
\end{aligned}$$

La matrice $\tilde{B} = -(\sigma I - A)^{-1}B$ che abbiamo introdotto è una matrice fittizia costante (che dipende dal parametro σ). Quindi la funzione $\tilde{F}(s) = C(sI - A)^{-1}\tilde{B}$ è una funzione razionale strettamente propria del tipo

$$\tilde{F}(s) = C(sI - A)^{-1}\tilde{B} = \frac{\tilde{n}(s)}{d(s)}$$

dove, fatto importante, $d(s) = \det(sI - A)$ è ancora il polinomio caratteristico di A . Se per semplicità assumiamo che gli autovalori di A siano distinti λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, la $\tilde{F}(s)$ può essere scritta come somma di fratti semplici come segue

$$\tilde{F}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{r}_i}{s - \lambda_i},$$

dove i coefficienti \tilde{r}_i sono residui calcolabili esattamente come quelli di $F(s)$. Allora abbiamo che

$$y_\sigma(s) = F(\sigma) \frac{1}{s - \sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{r}_i}{s - \lambda_i}. \quad (4.4)$$

È facile verificare che (4.4) vale anche nel caso $D \neq 0$. Tale espressione è ricavabile decomponendo la funzione razionale $F(s)/(s - \sigma)$ utilizzando l'espressione dei residui. Antitrasformando (e ricordando che σ è un parametro) abbiamo che

$$y_\sigma(t) = \underbrace{F(\sigma)e^{\sigma t}}_{\text{risposta a regime}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tilde{r}_i e^{\lambda_i t}}_{\text{risposta transitoria}}. \quad (4.5)$$

Nel caso di poli multipli questa espressione diventa semplicemente

$$y_\sigma(t) = \underbrace{F(\sigma)e^{\sigma t}}_{\text{risposta a regime}} + \underbrace{\sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{\mu_i - 1} \tilde{r}_{ij} t^j e^{\lambda_i t}}_{\text{risposta transitoria}} \quad (4.6)$$

dove μ_i è la molteplicità del polo. L'equazione (4.5) evidenzia due termini. Il primo, detto *risposta a regime*, è proporzionale al segnale di ingresso. Il secondo, detto *risposta transitoria*, dipende dai modi del sistema, precisamente è una combinazione lineare dei modi. Questo fatto è di estrema importanza

e può venire riassunto come segue. Nel caso in cui il sistema è asintoticamente stabile abbiamo che la risposta transitoria converge a zero. Per cui, dopo un tempo sufficientemente lungo, la risposta del sistema “coincide” (praticamente parlando) con la risposta a “regime” da cui il nome.

Risposta al segnale test: se ad un sistema lineare invariante viene applicato, a condizioni iniziali nulle, un segnale del tipo $e^{\sigma t}$, (assumendo $F(\sigma) \neq \infty$) la corrispondente risposta è composta da una parte transitoria, combinazione lineare di modi, e da una parte a regime che è proporzionale al segnale stesso. La costante di proporzionalità coincide con la funzione di trasferimento calcolata in σ ovvero $F(\sigma)$.

Dalla precedente conclusione possiamo definire il concetto di zeri di una funzione di trasferimento.

Zeri della funzione di trasferimento: Vengono detti *zeri* della funzione di trasferimento scalare (per sistemi ad un ingresso ed una uscita, $m = p = 1$) $F(s) = n(s)/d(s)$ i valori complessi $z \in \mathcal{C}$ per cui $F(z) = 0$. Tali valori sono le radici del numeratore ovvero i valori per cui $n(z) = 0$. Tali valori corrispondono a segnali di ingresso del tipo e^{zt} che non vengono trasmessi in uscita (ovvero la loro applicazione produce solo la risposta transitoria).

4.2.1 Cancellazioni zero–polo

Un fenomeno critico di cui bisogna tenere conto è quello delle cancellazioni zero–polo. Infatti è possibile che numeratore e denominatore abbiano delle radici in comune. Per esempio il sistema

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ha come funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s + \mu}{(s + 1)(s + \mu)} = \frac{1}{(s + 1)}.$$

Il primo effetto è che, una volta effettuata la cancellazione, le informazioni sul modo $\lambda = -\mu$ vengono definitivamente perdute. Questo fenomeno può avere due tipi di spiegazione. Una prima spiegazione è che esistono delle componenti del sistema che non risentono dell’ingresso. Questo è il caso dell’esempio nel quale vi sono due equazioni: $\dot{x}_1 = -1x_1 + u$ e $\dot{x}_2 = -\mu x_2$. La seconda, associata al modo $-\mu$, non risente dell’ingresso (neanche attraverso la variabile x_1) nel senso che la evoluzione di x_2 dipende da $x_2(0)$ ma non da $u(t)$.

Una seconda spiegazione è che esistano componenti del sistema che non producono nessun effetto in uscita. Come esempio possiamo prendere il

sistema “duale” di quello considerato sopra.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

avente la stessa funzione di trasferimento. Questa volta abbiamo che $y(t) = x_1(t)$, quindi y non risente della variabile $x_2(t)$ e il modo $-\mu$ non compare in uscita.

Il fenomeno delle cancellazioni è associato a “patologie” del sistema note come mancata raggiungibilità o mancata osservabilità, oggetto di studi futuri.

Una tipica ipotesi che si fa nello studio tramite funzioni di trasferimento è la *non-riducibilità* ovvero la *coprimalità tra numeratore e denominatore* nel senso che

$$n(\lambda) \neq 0, \quad \text{per ogni } \lambda \text{ tale che } d(\lambda) = 0.$$

4.3 La risposta in frequenza

Un caso di fondamentale importanza di segnale test è dato dall’ingresso del tipo

$$u(t) = u_0 e^{j\omega t} = u_0 \cos(\omega t) + u_0 j \sin(\omega t).$$

Se applichiamo tale ingresso ad un sistema lineare invariante avente funzione di trasferimento $F(s)$, otteniamo una risposta che possiamo decomporre nella parte reale e complessa

$$y(t) = R(t) + jI(t).$$

Dal principio di sovrapposizione degli effetti deduciamo che

- $R(t)$ è la risposta forzata al segnale $u_0 \cos(\omega t)$;
- $I(t)$ è la risposta forzata al segnale $u_0 \sin(\omega t)$.

Determinare la risposta del sistema a questo tipo di segnale è di fondamentale importanza, essendo un problema che sorge in moltissime applicazioni. Il fatto che si stia studiando la risposta del sistema ad un ingresso *complesso* non deve creare problemi. Si tratta di un artificio matematico che permette di sfruttare quanto visto sull’ingresso test $e^{\sigma t}$ e di calcolare contemporaneamente e in maniera semplice le risposte del sistema agli ingressi (reali) $u(t) = u_0 \cos(\omega t)$ e $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$. Nulla vieta di calcolare separatamente tali risposte ma i calcoli risulterebbero molto più laboriosi.

Attraverso la (4.5) si ottiene la seguente espressione per $y(t)$:

$$y(t) = F(j\omega)u_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{r}_i}{s - \lambda_i} = F(j\omega)u_0 e^{j\omega t} + trans(t), \quad (4.7)$$

dove $trans(t)$, è la componente transitoria.

Assumiamo che il sistema sia asintoticamente stabile. Se così è allora $trans(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, dunque dopo un tempo sufficientemente lungo

$$y(t) \approx F(j\omega)u_0e^{j\omega t}$$

che possiamo scrivere come

$$y(t) = F(j\omega)u_0e^{j\omega t}, \quad \text{a regime.}$$

Scriviamo il numero complesso $F(j\omega)$ nella notazione trigonometrica (cioè in modulo e fase)

$$F(j\omega) = A_\omega e^{j\phi_\omega}$$

dove $A_\omega = |F(j\omega)|$ e $\phi_\omega = \arg(F(j\omega))$, ottenendo a regime

$$y(t) = A_\omega u_0 e^{j\omega t + \phi_\omega}.$$

La (4.7) può essere scomposta nelle parti reale e immaginaria come segue

$$R(t) = A_\omega u_0 \cos(\omega t + \phi_\omega) + trans_R(t) \quad (4.8)$$

$$I(t) = A_\omega u_0 \sin(\omega t + \phi_\omega) + trans_I(t) \quad (4.9)$$

dove $trans_R(t)$ e $trans_I(t)$ sono funzioni (reali) che rappresentano la parte reale ed immaginaria della funzione $trans(t)$ (quindi a loro volta combinazione lineare di modi). Le espressioni (4.8) e (4.9) ci danno l'espressione della risposta agli ingressi $u_0 \cos(\omega t)$ e $u_0 \sin(\omega t)$. Sotto ipotesi di stabilità asintotica del sistema abbiamo che le componenti transitorie $trans_R(t)$ e $trans_I(t)$ convergono a zero. Otteniamo a regime

$$R(t) = A_\omega u_0 \cos(\omega t + \phi_\omega) \quad (4.10)$$

$$I(t) = A_\omega u_0 \sin(\omega t + \phi_\omega). \quad (4.11)$$

Il significato di quanto visto può essere riassunto come segue

Risposta armonica Un sistema asintoticamente stabile al quale viene applicato un ingresso del tipo $u_0 \cos(\omega t)$ (risp. $u_0 \sin(\omega t)$) con condizioni iniziali nulle produce come risposta a regime una funzione del tipo (4.10) (risp. (4.11)) amplificata e sfasata. Il fattore di amplificazione è dato da

$$A_\omega = |F(j\omega)|$$

mentre l'angolo di sfasamento è

$$\phi_\omega = \arg(F(j\omega))$$

cioè, rispettivamente, da modulo e fase della funzione di trasferimento $F(s)$ valutata in $s = j\omega$.

Allora per descrivere la risposta armonica o la risposta in frequenza di un sistema è possibile diagrammare al variare di ω l'andamento delle funzioni $|F(j\omega)|$ e delle funzioni $\arg(F(j\omega))$. Per motivi che risulteranno chiari nel seguito, di solito la pulsazione ω viene riportata in scala logaritmica, che viene suddivisa in decadi mentre del modulo viene riportato il valore in decibel.

Definizione Il valore in decibel di una quantità positiva μ è dato da

$$\mu dB = 20 \log_{10} \mu$$

La scala usata nei diagrammi è convenzionalmente ripartita in multipli di 20 dB.

Esempio Consideriamo la funzione

$$F(s) = k \frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Per valori di ξ compresi tra 0 e 1 rappresenta un classico sistema oscillante sottosmorzato (per $\xi = 0$ rappresenta l'oscillatore puro). Per ξ maggiore di 1 rappresenta un sistema oscillante sovrasmorzato. Dal punto di vista della risposta in frequenza, nel primo caso ci troviamo di fronte ad una sistema a banda stretta, mentre nel secondo caso ci troviamo di fronte ad un sistema a banda larga. Nelle figure che seguono sono riportati gli andamenti della risposta in frequenza per due valori distinti di ξ e per $\omega_0 = 1$ e $k = 1$. In corrispondenza del valore $\xi = 1/4$ (figura 4.1) notiamo che il modulo ha un massimo per la pulsazione $\omega = 1$ e che la funzione modulo presenta una "punta" (che risulterebbe molto più accentuata se $|F(j\omega)|$ fosse riportato in scala lineare anziché in decibel) tipica di un sistema che "fa filtrare" le frequenze prossime a quella di risonanza (che come si può dimostrare, è $\omega = \omega_0$) molto più delle altre. Nella figura 4.2 è riportato l'andamento tipico di un oscillatore sovrasmorzato corrispondente al valore $\xi = 4$. Come si vede l'amplificazione alle varie frequenze è molto più omogenea in un ampio intorno della frequenza per cui si ha il massimo $\omega = 1$.

4.4 Schemi a blocchi

Uno strumento molto utile per la rappresentazione di sistemi è fornito dagli schemi a blocchi. Data la rappresentazione ingresso-uscita di un sistema

$$y(s) = F(s)u(s),$$

è sempre possibile associare a tale espressione la rappresentazione visiva di figura 4.3.

La somma di due segnali $y(s) = u_1(s) + u_2(s)$ può essere rappresentata come in figura 4.4. I blocchi possono essere composti fra loro per rappresentare sistemi interconnessi. Semplici esempi sono la *serie* di sistemi e il

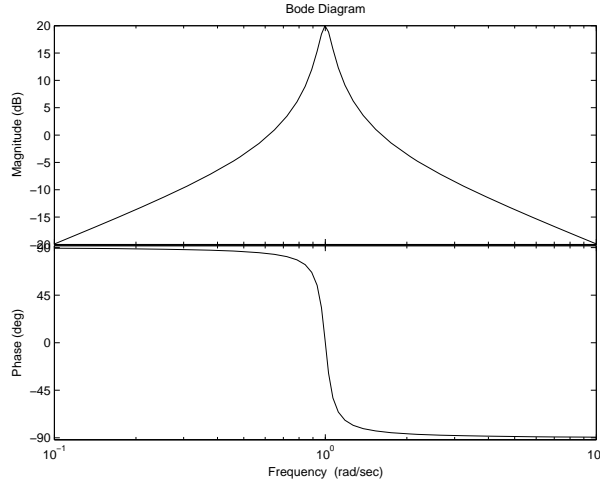


Figura 4.1: Risposta in frequenza del sistema per $\xi = 1/4$

parallelo. Due sistemi si dicono in serie se l'ingresso di uno è l'uscita dell'altro. Se i sistemi sono espressi come $y_1(s) = F_1(s)u_1(s)$ e $y_2(s) = F_2(s)u_2(s)$ allora si dicono connessi in serie se $u_2(s) = y_1(s)$. La serie si rappresenta come in figura 4.5 e dal punto di vista ingresso-uscita equivale al sistema la cui rappresentazione ingresso-uscita è

$$y(s) = F_2(s)F_1(s)u(s)$$

dove $y(s) = y_2(s)$ e $u(s) = u_1(s)$, ovvero la funzione di trasferimento risultante è il prodotto delle funzioni di trasferimento.

Due sistemi rappresentati come $y_1(s) = F_1(s)u_1(s)$ e $y_2(s) = F_2(s)u_2(s)$ si dicono connessi in parallelo (vedi fig. 4.6) se hanno ingresso comune $u_1(s) = u_2(s)$ e l'uscita è data dalla somma delle uscite $y(s) = y_1(s) + y_2(s)$. La funzione di trasferimento risultante della connessione in parallelo è la somma delle funzioni di trasferimento

$$y(s) = [F_2(s) + F_1(s)]u(s).$$

È ovvio che il concetto di connessione serie o parallelo può essere esteso al caso di n sistemi. La serie di n sistemi ha come funzione di trasferimento il prodotto $F(s) = \prod F_i(s)$ mentre il parallelo ha come funzione di trasferimento la somma $F(s) = \sum F_i(s)$.

Un tipo di connessione molto importante è la connessione in *retroazione* o *feedback*. Per generalità consideriamo il caso di ν sistemi. Diciamo che ν sistemi aventi come rappresentazione ingresso-uscita $y_i(s) = F_i(s)u_i(s)$ sono connessi in retroazione o feedback se (posti a zero tutti gli eventuali segnali esterni) abbiamo che (assumendo che $u_0(s) = u_\nu$)

$$y_i(s) = u_{i-1}(s).$$

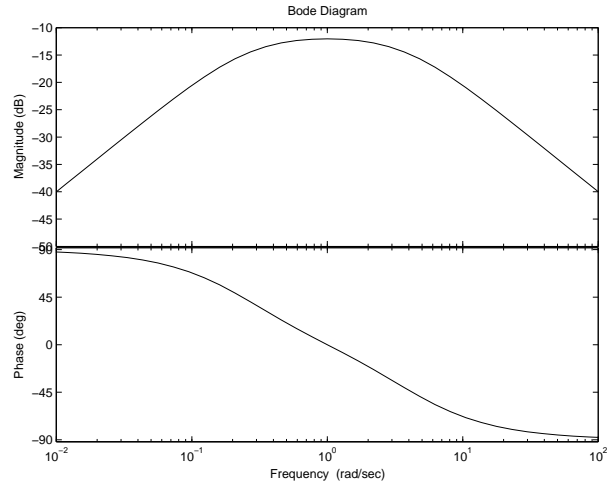


Figura 4.2: Risposta in frequenza del sistema per $\xi = 4$

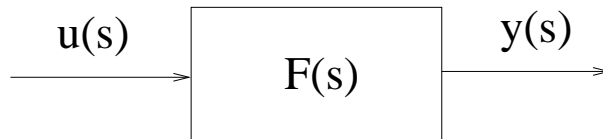


Figura 4.3: Blocco funzionale con funzione di trasferimento $F(s)$

Per dare una rappresentazione più dettagliata della cosa consideriamo un tipico schema feedback da regolazione come quello di Figura 4.7. Nella figura i segnali e i blocchi rappresentano

F funzione di trasferimento del processo;

K funzione di trasferimento del regolatore;

G funzione di trasferimento del sensore;

r ingresso di riferimento (esterno);

d ingresso di disturbo sul segnale di attuazione (esterno);

w ingresso di disturbo sul segnale di misura (esterno);

v segnale di controllo del sistema;

z misura disturbata;

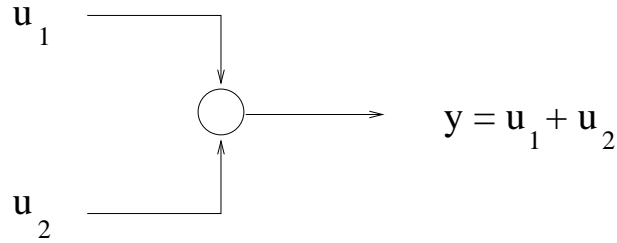


Figura 4.4: Rappresentazione della somma di segnali

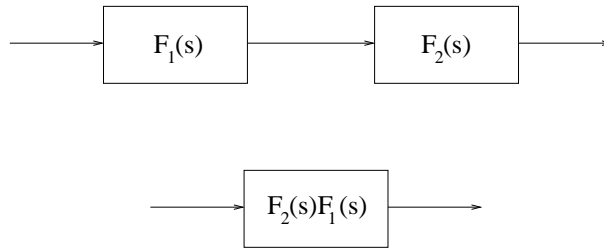


Figura 4.5: Sistemi in serie

u uscita dell'attuatore;

y uscita del sistema;

p uscita del sensore;

e errore di uscita;

Chiaramente i tre sistemi (processo, sensore, regolatore) sono in retroazione in quanto posti a zero i segnali esterni ($r = w = d = 0$) abbiamo la struttura "ad anello" tipica della retroazione.

Evidentemente, in un caso come questo, abbiamo diverse funzioni di trasferimento a seconda della scelta di ingressi e di uscite. Per determinare la funzione di trasferimento tra il generico ingresso e la generica uscita dobbiamo porre a zero tutti gli ingressi tranne quello in questione ed eliminare le variabili non in questione. Poniamo

$$F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}, \quad G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

e assumiamo che tutte le funzioni di trasferimento siano razionali proprie e prive di cancellazioni zero-polo. Per ottenere, ad esempio, la funzione di

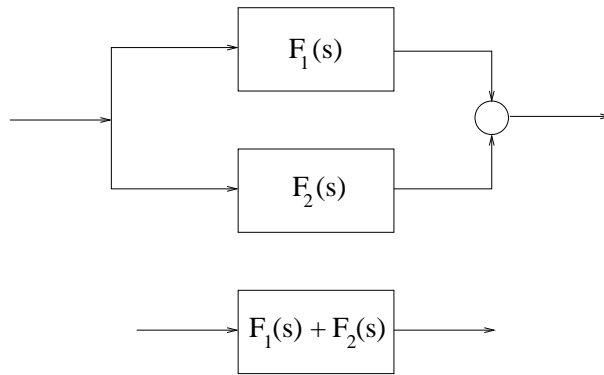


Figura 4.6: Sistemi in parallelo

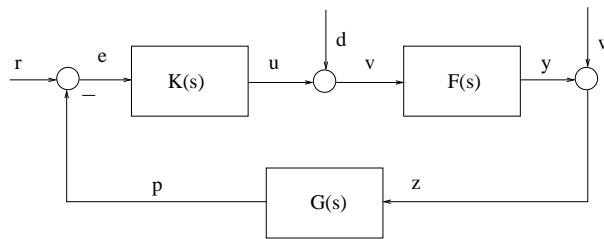


Figura 4.7: Schema di regolazione in feedback

trasferimento tra l'ingresso r e l'uscita y dobbiamo ignorare (porre a zero) gli ingressi d e w . Di conseguenza abbiamo $u = v$ e $z = y$. Ne segue

$$y = Fu = FKe = FK(r - Gy),$$

per cui possiamo ricavare y

$$y = \frac{FK}{1 + FKG}r.$$

Tenuto conto delle espressioni di F , K e G abbiamo

$$y(s) = \frac{N_F(s)N_K(s)D_G(s)}{D_F(s)D_K(s)D_G(s) + N_F(s)N_K(s)N_G(s)}r(s).$$

Deve essere chiaro che la assenza di cancellazioni tra numeratore e denominatore delle funzioni di trasferimento dei singoli blocchi non garantisce l'assenza di cancellazioni nella funzione di trasferimento complessiva. Il lettore è invitato a ricavare altre funzioni di trasferimento scegliendo ingressi e/o uscite diversi per verificare il seguente fondamentale principio.

Principio della dinamica di anello Il denominatore della funzione di trasferimento risultante è dato (a meno di cancellazioni) dalla somma del prodotto dei numeratori delle funzioni coinvolte nell'anello più il prodotto dei denominatori delle funzioni coinvolte nell'anello *indipendentemente dalla scelta dell'ingresso e dell'uscita*. In particolare, i modi del sistema risultante non dipendono dalla scelta degli ingressi e delle uscite essendo univocamente determinati dalle radici del polinomio ad anello chiuso

$$D_{CL}(s) = D_F(s)D_K(s)D_G(s) + N_F(s)N_K(s)N_G(s).$$

Chiaramente i numeratori dipendono dalla scelta degli ingressi e delle uscite. Questo fatto non incide sulla stabilità del sistema risultante che ovviamente non dipende da ingressi esterni.

Si noti che il segno + nell'espressione di $D_{CL}(s)$ è dovuto al fatto che la retroazione è negativa (ovvero p viene preso con il segno -) viceversa troveremmo il segno -. Il seguente concetto tornerà utile nel seguito.

Definizione Dicesi funzione di trasferimento di anello aperto (open-loop) la funzione

$$W_{OL}(s) = F(s)K(s)G(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)} \frac{N_K(s)}{D_K(s)} \frac{N_G(s)}{D_G(s)}, \quad (4.12)$$

cioè il prodotto delle funzioni di trasferimento dell'anello.

È possibile avere a che fare con configurazioni più generali di quella vista, come quella della Figura 4.8. Anche in questo caso, per determina-

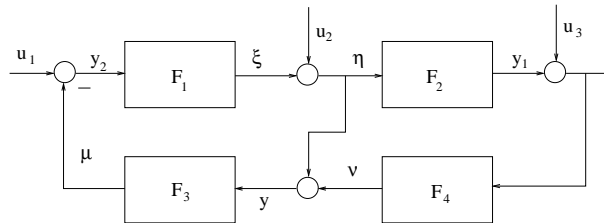


Figura 4.8: Schema a blocchi

re la funzione di trasferimento tra il generico ingresso e la generica uscita dobbiamo

- porre a zero tutti gli ingressi tranne quello in questione;
- eliminare tutte le variabili interne e uscite tranne quella in questione.

Per esempio per ricavare la funzione di trasferimento tra u_1 e y_2 , poniamo $u_2 = u_3 = 0$. Otteniamo così

$$\begin{aligned}\mu &= F_3(\eta + \nu) = F_3(F_1 y_2 + F_4 F_2 F_1 y_2) \\ &= (F_1 F_3 + F_1 F_2 F_3 F_4) y_2\end{aligned}$$

da cui

$$y_2 = u_1 - \mu = u_1 - (F_1 F_3 + F_1 F_2 F_3 F_4) y_2.$$

Ricavando y_2 si ottiene

$$y_2 = \frac{1}{1 + F_1 F_3 + F_1 F_2 F_3 F_4} u_1,$$

ossia

$$y_2 = \frac{D_{F_1} D_{F_2} D_{F_3} D_{F_4}}{D_{F_1} D_{F_2} D_{F_3} D_{F_4} + N_{F_1} N_{F_3} D_{F_2} D_{F_4} + N_{F_1} N_{F_2} N_{F_3} N_{F_4}} u_1.$$

4.4.1 Il problema delle cancellazioni dovute a connessione

Come osservato, nella connessione di sistemi possono crearsi delle cancellazioni anche se i singoli blocchi ne sono privi. Per spiegare questo fenomeno consideriamo il caso di un sistema serie. Prendiamo la seguente connessione serie

$$y(s) = F_2(s)[d(s) + F_1(s)u(s)] = \frac{1}{s + \mu} \left[d(s) + \frac{s + \mu}{s + 1} u(s) \right]$$

e poniamo $d(s) = 0$. Allora se per esempio prendiamo un segnale a gradino $u(s) = 1/s$ otteniamo

$$y(s) = \frac{1}{(s + 1)s}$$

quindi non c'è traccia del modo $e^{-\mu t}$.

D'altro canto questo modo compare non appena si prendano condizioni iniziali diverse da zero oppure si prenda un segnale $d(s) \neq 0$ (anche se piccolissimo). Questo fatto non comporterebbe particolari problemi per $\mu > 0$. Per $\mu < 0$ invece questo modo è instabile e ciò provocherebbe la divergenza dell'uscita del sistema. Questo vuol dire che il modo μ è silente in quanto non "eccitato" dall'ingresso u , ma che può venire eccitato dall'ingresso d o da condizioni iniziali non nulle.

Possiamo anche fare un ragionamento invertendo i blocchi.

$$y(s) = F_1(s)z(s) = \frac{s + \mu}{s + 1} \underbrace{\left[\frac{1}{s + \mu} u(s) \right]}_{z(s)}.$$

In questo caso, se prendiamo ad esempio il gradino $u(s) = 1/s$ il segnale $z(s)$ è

$$z(s) = \frac{1}{(s + \mu)s}$$

e quindi $z(t)$ include il modo $e^{-\mu t}$, ma questo viene “cancellato” dal blocco $F_2(s)$ che ha uno 0 in $-\mu$ e quindi il modo non compare all’uscita, che è

$$y(s) = \frac{1}{(s + 1)s}.$$

Questo è però assolutamente non accettabile nella pratica se $\mu < 0$. Infatti il segnale intermedio $z(t)$ divergerebbe anche se $y(t)$ rimane limitato.

Va inoltre detto che, nella pratica, le cancellazioni non possono essere perfette quindi abbiamo la seguente.

Regola delle cancellazioni Una cancellazione zero–polo comporta la non presenza di un modo nel rapporto ingresso–uscita. Se la cancellazione è relativa ad un polo instabile questo implica la presenza di parti del sistema che possono divergere (anche se l’uscita rimane limitata) e danneggiare il sistema. La cancellazione zero–polo instabile è assolutamente da evitarsi nella realizzazione di sistemi di controllo.

Per esaminare l’aspetto delle cancellazioni in un anello di controllo consideriamo la figura 4.7. Assumiamo che le tre funzioni di trasferimento

$$F(s) = \frac{N_F(s)}{D_F(s)}, \quad K(s) = \frac{N_K(s)}{D_K(s)}, \quad G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

siano non–riducibili. Quello che è possibile vedere è la seguente proprietà.

Proprietà Se esiste una cancellazione fra denominatore e numeratore di una qualunque delle funzioni di trasferimento ad anello chiuso, allora quella stessa cancellazione è una cancellazione della funzione ad anello aperto $W_{OL}(s) = F(s)K(s)G(s)$ tra un numeratore di una delle funzioni e uno dei denominatori delle altre due.

Se per esempio prendiamo la funzione di trasferimento tra l’ingresso r e l’uscita y (vedi Figura 4.7)

$$y(s) = \frac{N_F(s)N_K(s)D_G(s)}{D_F(s)D_K(s)D_G(s) + N_F(s)N_K(s)N_G(s)}r(s)$$

se esiste λ radice di numeratore e denominatore abbiamo tre casi: 1) $N_F(\lambda) = 0$ allora, se anche il denominatore è nullo, si ha $D_F(\lambda)D_K(\lambda)D_G(\lambda) = 0$ e, siccome per la non–riducibilità di $F(s)$ $D_F(\lambda) \neq 0$, si ha che $D_K(\lambda)D_G(\lambda) = 0$; se $N_K(\lambda) = 0$ allora $D_F(\lambda)D_K(\lambda)D_G(\lambda) = 0$ e $D_K(\lambda) \neq 0$, quindi $D_F(\lambda)D_G(\lambda) = 0$ 3) se $D_G(\lambda) = 0$ allora $N_F(\lambda)N_K(\lambda)N_G(\lambda) = 0$ e siccome $N_G(\lambda) \neq 0$ abbiamo $N_F(\lambda)N_K(\lambda) = 0$.

Quindi per garantire l'assenza di cancellazioni zero-polo nella funzione di trasferimento ad anello chiuso, dobbiamo assicurarci che per qualunque scelta di ingresso e uscita non vi siano radici comuni tra i due polinomi

$$D_{OL} = D_F(s)D_K(s)D_G(s), \quad N_{OL} = N_F(s)N_K(s)N_G(s).$$

ovvero che la funzione $W_{OL}(s)$ non sia riducibile.

Principio dei poli ad anello chiuso. Se non ci sono cancellazioni zero-polo, i poli ad anello chiuso ovvero le radici del denominatore sono tutti e soli i valori che soddisfano l'equazione

$$W_{OL}(s) + 1 = F(s)K(s)G(s) + 1 = 0$$

(se ci sono cancellazioni allora radici del polinomio ad anello chiuso $P_{CL}(s) = D_F(s)D_K(s)D_G(s) + N_F(s)N_K(s)N_G(s)$ potrebbero non soddisfare $W_{OL}(s) + 1 = 0$ neanche come "valore limite").

Capitolo 5

Esempi

5.1 Analisi modale

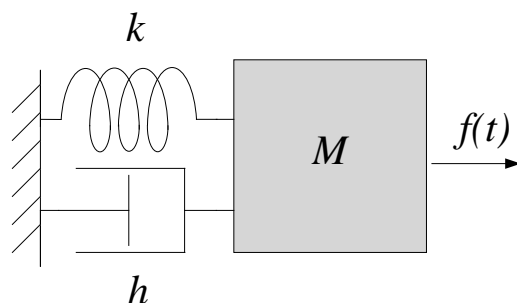


Figura 5.1:

5.1.1 Sistemi meccanici ed elettrici del secondo ordine

Consideriamo il sistema meccanico di Fig.5.1, costituito da una massa M , una molla di costante elastica k e uno smorzatore di costante h . Detta $y(t)$ l'ascissa della massa rispetto alla posizione di riposo, tale sistema è descritto dalla seguente equazione dinamica

$$M\ddot{y} + h\dot{y} + ky = f(t).$$

Il circuito di Fig.5.2, detta $y(t)$ la carica accumulata sulle armature del condensatore è descritto invece dalla

$$L\ddot{y} + R\dot{y} + \frac{1}{C}y = u(t).$$

Le equazioni hanno dunque la stessa forma. Si osservino le corrispondenze tra il condensatore e la molla (che accumulano energia elettrostatica ed elastica, rispettivamente), tra il resistore e lo smorzatore (che sono gli elementi

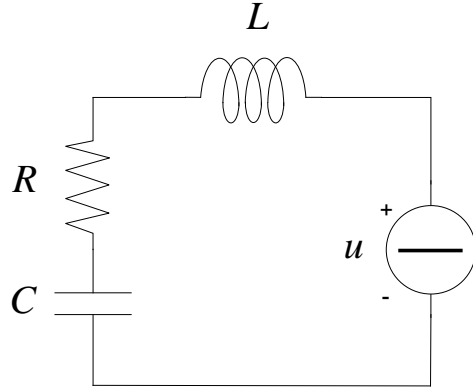


Figura 5.2:

dissipativi) e tra la massa e l'induttore (che accumulano energia cinetica e magnetostatica rispettivamente). L'analisi modale permette di trattare allo stesso modo i due sistemi. Entrambe le equazioni possono essere scritte nel modo seguente

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = u(t),$$

dove $\omega_0 > 0, \xi \geq 0$. Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine. Ponendo $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$ è possibile ricondursi al seguente sistema di due equazioni lineari del primo ordine

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2\xi\omega_0 x_2 + u(t), \quad (5.2)$$

che può essere scritto in forma compatta come

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

avendo posto

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Allora si ha

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 - \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 2\xi\omega_0\lambda + \omega_0^2.$$

Uguagliando a zero si ottiene, per gli autovalori λ_1 e λ_2 la seguente espressione:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}.$$

Osserviamo anzitutto che, quali che siano i valori di $\omega_0 > 0$ e $\xi \geq 0$, gli autovalori non hanno mai parte reale positiva. Studiamo ora i modi del sistema al variare dello smorzamento $\xi \geq 0$. Per $\xi > 1$ il radicando è positivo e quindi si hanno autovalori reali distinti, entrambi strettamente minori di zero. Il sistema risulta quindi asintoticamente stabile e i modi sono

$$e^{-\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t}, \quad e^{-\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t}.$$

Per $\xi = 1$ il radicando è nullo quindi si hanno due autovalori reali coincidenti $\lambda = -\omega_0$. Essendo gli autovalori strettamente minori di zero, il sistema è asintoticamente stabile. Per sapere quali sono i suoi modi bisogna trovare il grado dell'autovalore $\lambda = -\omega_0$. Il grado è pari al più piccolo intero k per cui si ha

$$\text{rank}((A - \lambda I)^k) = \text{rank}((A - \lambda I)^{k+1}).$$

Poiché $\text{rank}(A - \lambda I) = 1$ e $\text{rank}((A - \lambda I)^k) = 0$, $\forall k \geq 2$ allora il grado dell'autovalore è $\nu(\lambda) = 2$ e quindi i modi sono:

$$e^{-\omega_0 t}, \quad t e^{-\omega_0 t}.$$

Per $0 < \xi < 1$ il radicando è negativo e quindi si hanno due autovalori complessi a parte reale strettamente negativa:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}.$$

Anche in questo caso si ha stabilità asintotica. I modi sono

$$e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t), \quad e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}t),$$

a cui corrispondono andamenti oscillanti smorzati della risposta libera.

Infine, per $\xi = 0$ (ovvero in assenza di dissipazione $R = 0$ o $h = 0$) i due autovalori hanno parte reale nulla: $\lambda = \pm j\omega_0$. Il sistema è ancora stabile ma solo marginalmente. I modi sono oscillanti non smorzati ossia

$$\cos \omega_0 t, \quad \sin \omega_0 t.$$

5.1.2 Giunto elastico.

Consideriamo i due volani di Fig.5.3, i cui momenti di inerzia sono J_1 e J_2 , connessi da un giunto elastico di costante k e lunghezza l . Sul primo dei due volani è applicata una coppia motrice $C_m(t)$, sul secondo una coppia resistente $C_r(t)$. Siano $\vartheta_1(t)$ e $\vartheta_2(t)$ gli angoli dei volani rispetto ad uno stesso riferimento fisso. Il sistema è retto dalle equazioni seguenti

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\vartheta}_1(t) &= -k(\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)) + C_m \\ J_2 \ddot{\vartheta}_2(t) &= -k(\vartheta_2(t) - \vartheta_1(t)) - C_r \end{cases}$$

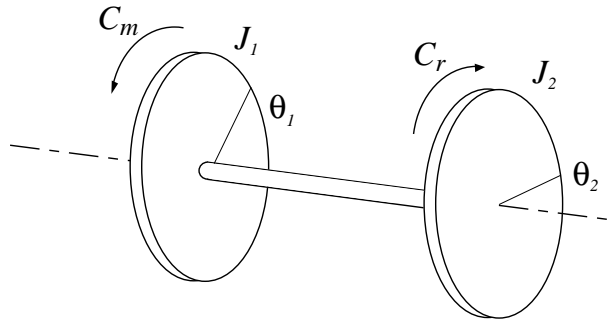


Figura 5.3:

Ponendo

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \vartheta_1(t) \\
 x_2(t) &= \vartheta_2(t) \\
 x_3(t) &= \dot{\vartheta}_1(t) \\
 x_4(t) &= \dot{\vartheta}_2(t) \\
 u(t) &= [C_m(t) \ C_r(t)]^T
 \end{aligned}$$

si perviene alla rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \end{bmatrix} u(t),$$

dove si è posto $\alpha = \frac{k}{J_1}$ e $\beta = \frac{k}{J_2}$. È semplice verificare che il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda^2 + \alpha + \beta).$$

Gli autovalori sono pertanto

$$0, 0, \pm j\sqrt{\alpha + \beta}.$$

Il sistema non può essere stabile asintoticamente (ci sono autovalori puramente immaginari). Per verificare se lo è marginalmente bisogna trovare il grado dell'autovalore nullo calcolando $\text{rank}((A - \lambda I)^k) = \text{rank}(A^k)$ per $k \geq 1$ fin quando tale rango cessa di decrescere. Si ha, come è facile verificare

$$\begin{aligned}
 \text{rank}(A) &= 3 \\
 \text{rank}(A^2) &= 2 \\
 \text{rank}(A^3) &= 2.
 \end{aligned}$$

Pertanto $\nu(0) = 2$ e dunque il sistema è instabile. I modi sono

$$1, \quad t, \quad \cos(\sqrt{\alpha + \beta}t), \quad \sin(\sqrt{\alpha + \beta}t).$$

Ci si può chiedere quali siano le condizioni iniziali per cui la risposta libera non ha oscillazioni. Sono quelle che non sollecitano i modi oscillanti ossia tutte e sole quelle appartenenti all'autospazio generalizzato¹ associato all'autovalore nullo. Cioè quelle appartenenti al sottospazio

$$\text{Ker}(A^{\nu(0)}) = \text{Ker}(A^2).$$

È immediato verificare che

$$A^2 = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & -\beta \end{bmatrix},$$

per cui il generico vettore appartenente al sottospazio cercato è del tipo

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \delta \\ \delta \end{bmatrix}, \quad \gamma, \delta \in \mathfrak{R}.$$

Quindi le condizioni iniziali per le quali la risposta libera non ha oscillazioni sono tutte e sole quelle per cui

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= \theta_2(0) \\ \dot{\theta}_1(0) &= \dot{\theta}_2(0), \end{aligned}$$

il che è in accordo con l'intuizione che dice una differenza nei due angoli o nelle velocità angolari innesca necessariamente una oscillazione a causa della elasticità del giunto.

5.2 Sistemi non lineari

5.2.1 Circuito elettrico non lineare.

Si consideri il circuito di Fig.5.4, dove il componente Z è un resistore non lineare con la seguente caratteristica corrente-tensione (il cui andamento è riportato in Fig.5.5):

$$I(V) = \frac{1}{1 + e^{-V}} - \frac{1}{2}. \quad (5.3)$$

¹L'autospazio associato all'autovalore λ è $\text{Ker}(A - \lambda I)$ mentre l'autospazio *generalizzato* è $\text{Ker}((A - \lambda I)^{\nu(\lambda)})$. Evidentemente i due sottospazi coincidono se l'autovalore ha grado unitario.

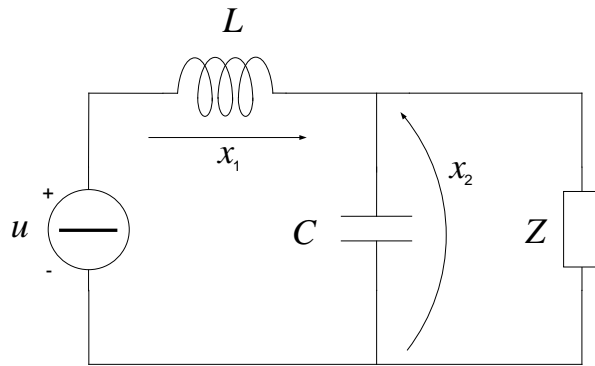


Figura 5.4:

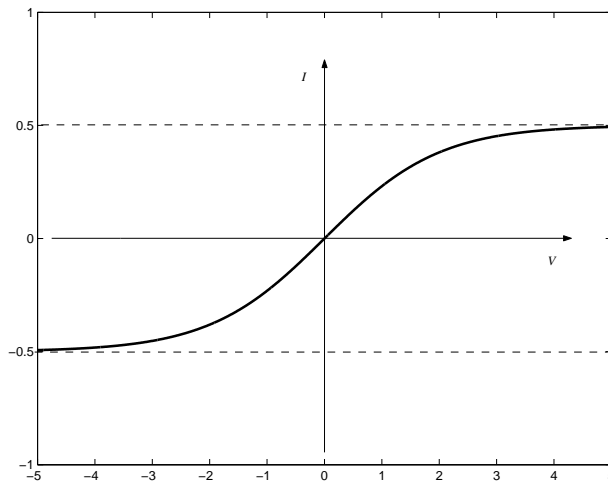


Figura 5.5:

Per ricavarne una rappresentazione di stato conviene prendere come variabili di stato la corrente che attraversa l'induttore e la tensione ai capi del condensatore, come indicato in figura. La tensione ai capi del generatore deve eguagliare la somma delle tensioni ai capi dell'induttore e del condensatore:

$$u(t) = L\dot{x}_1 + x_2. \quad (5.4)$$

La corrente che attraversa Z è pari a quella che attraversa l'induttore meno quella che attraversa il condensatore:

$$\frac{1}{1 + e^{-x_2}} - \frac{1}{2} = x_1 - C\dot{x}_2. \quad (5.5)$$

Riarrangiando la (5.4) e la (5.5) si ottiene la seguente rappresentazione di

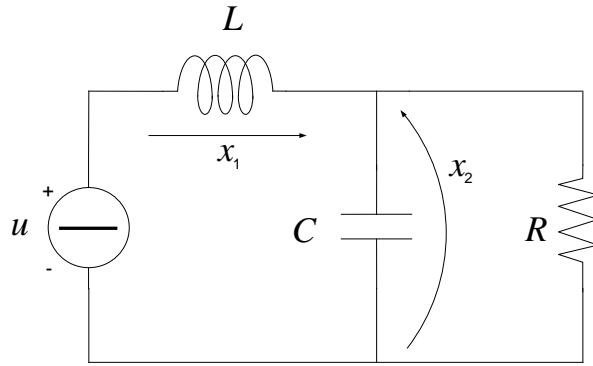


Figura 5.6:

stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -\frac{x_2(t)}{L} + \frac{u(t)}{L} \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{x_1(t)}{C} - \frac{1}{C} \left(\frac{1}{1+e^{-x_2(t)}} - \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (5.6)$$

Si tratta chiaramente di un sistema non lineare. Cerchiamone le coppie di equilibrio: ponendo $u(t) = \bar{u}$, $x_1(t) = \bar{x}_1$ e $x_2(t) = \bar{x}_2$ ed uguagliando a zero la derivata del vettore di stato si ottiene

$$\begin{cases} 0 &= -\frac{\bar{x}_2}{L} + \frac{\bar{u}}{L} \\ 0 &= \frac{\bar{x}_1}{C} - \frac{1}{C} \left(\frac{1}{1+e^{-\bar{x}_2}} - \frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava subito

$$\bar{x}_2 = \bar{u} \quad (5.7)$$

e di conseguenza dalla seconda si ottiene

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{1+e^{-\bar{u}}} - \frac{1}{2}. \quad (5.8)$$

Dunque per il sistema ogni \bar{u} è ingresso di equilibrio, a cui corrisponde lo stato di equilibrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) dato dalle (5.7) e (5.8). Si noti che lo stato di equilibrio non dipende da L né da C (perché quando correnti e tensioni sono costanti l'induttore equivale ad un circuito chiuso e il condensatore ad un circuito aperto).

Il sistema (5.6) è nella forma $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, pertanto il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio (\bar{x}, \bar{u}) è descritto dalla

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t)$$

con $z(t) = x(t) - \bar{x}$ e $v(t) = u(t) - \bar{u}$,

$$A = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})}, \quad B = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{array} \right] \Bigg|_{(\bar{x}, \bar{u})}.$$

In particolare, si ha:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} \frac{e^{-\bar{x}_2}}{(1+e^{-\bar{x}_2})^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora ci chiediamo se vi sono ingressi \bar{u} di equilibrio tali che il sistema linearizzato sia equivalente a quello di Fig.5.6, dove il componente non lineare è stato rimpiazzato da un resistore R . È facile verificare che la rappresentazione di stato del circuito di Fig.5.6 è la seguente:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

(in questo caso il sistema è lineare e non dobbiamo introdurre traslazioni). Pertanto affinché il sistema linearizzato sia equivalente a quello di Fig.5.6 deve essere:

$$\frac{e^{-\bar{x}_2}}{(1+e^{-\bar{x}_2})^2} = \frac{e^{-\bar{u}}}{(1+e^{-\bar{u}})^2} = \frac{1}{R},$$

dove la prima uguaglianza è conseguenza della (5.7). Per trovare gli ingressi \bar{u} che soddisfano tale condizione, si può porre $t = e^{-\bar{u}}$ ottenendo in tal modo:

$$\frac{t}{(1+t)^2} = \frac{1}{R},$$

da cui, moltiplicando entrambi i membri per $(1+t)^2 \neq 0$ e riarrangiando si ricava l'equazione di secondo grado in t

$$t^2 + (2-R)t + 1 = 0 \tag{5.9}$$

le cui soluzioni sono:

$$t_{1,2} = \frac{(R-2) \pm \sqrt{R(R-2)}}{2}.$$

Dal momento che $t = e^{-\bar{u}} > 0$ sono accettabili solo le soluzioni reali positive, ossia quelle corrispondenti a $R > 2$. In questo caso si avranno i due ingressi di equilibrio:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\ln t_1 \\ \bar{u}_2 &= -\ln t_2 \end{aligned}$$

Per $R \leq 2$ nessun ingresso di equilibrio è tale che il circuito linearizzato sia equivalente a quello lineare di Fig.5.6.

Si osservi che quanto appena fatto è consistito nel cercare il punto di lavoro del circuito non lineare per cui la pendenza della curva caratteristica corrente-tensione fosse pari a $1/R$. Come si vede dalla Fig.5.5, tale curva caratteristica è dispari pertanto ci si deve attendere che le tensioni di equilibrio siano simmetriche rispetto allo zero, ossia $\bar{u}_1 = -\bar{u}_2$. In effetti si può provare che tali tensioni sono simmetriche e si invita a farlo per esercizio (suggerimento: affinché si abbia $\bar{u}_1 = -\bar{u}_2$ deve essere, per una nota proprietà dei logaritmi, $t_1 = t_2^{-1}$, quindi bisogna provare che le radici della (5.9) sono l'una il reciproco dell'altra).

5.2.2 Compressore centrifugo

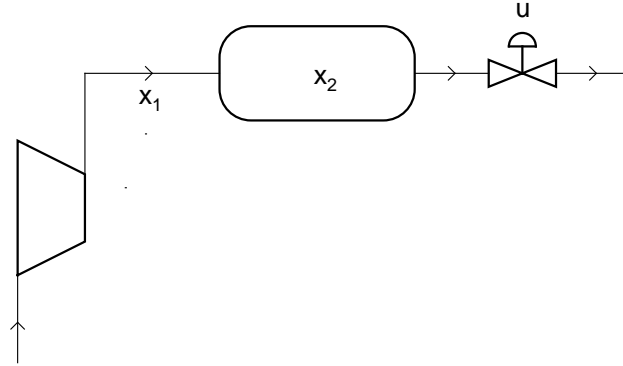


Figura 5.7:

Consideriamo lo schema di Fig.5.7 dove un compressore centrifugo immette una portata x_1 di fluido in un plenum a pressione x_2 . La curva caratteristica $\Psi(x_1)$ del compressore è del tipo riportato in Fig.5.8 (linea continua) e rappresenta il legame tra portata di fluido elaborata e pressione di mandata. Tramite una valvola è possibile regolare la portata di fluido che fuoriesce dal plenum. La portata uscente è pari a $u\Gamma(x_2)$ dove u è la apertura della valvola e $\Gamma(x_2)$ la sua curva caratteristica (la curva cioè che esprime la portata attraverso la valvola in funzione della pressione a monte della valvola quando l'apertura è "unitaria"). In Fig.5.8 è riportato l'andamento tipico di $u\Gamma(x_2)$ per due diverse aperture della valvola. Poiché le perdite di carico sono proporzionali al quadrato della portata, si ha tipicamente $\Gamma(x_2) \propto \sqrt{x_2}$. Il sistema può essere descritto per mezzo delle equazioni seguenti:

$$\dot{x}_1 = -\alpha[x_2 - \Psi(x_1)] \quad (5.10)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\beta}[x_1 - u\Gamma(x_2)]. \quad (5.11)$$

La prima dice che la portata diminuisce (aumenta) se la pressione nel plenum è maggiore (minore) di quella che il compressore può garantire alla portata attuale. La seconda dice che la pressione nel plenum aumenta (diminuisce) se la portata entrante è maggiore (minore) della portata uscente. Si tratta evidentemente di un sistema dinamico non lineare. Uguagliando a zero la derivata del vettore di stato si trovano le condizioni di equilibrio

$$\bar{x}_2 = \Psi(\bar{x}_1) \quad (5.12)$$

$$\bar{x}_1 = \bar{u}\Gamma(\bar{x}_2). \quad (5.13)$$

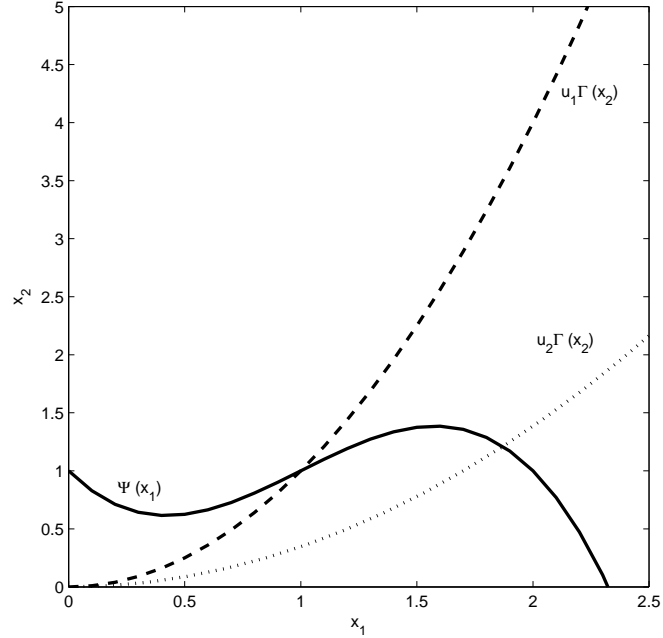


Figura 5.8:

La prima dice che la coppia (\bar{x}_1, \bar{x}_2) appartiene alla curva Ψ e la seconda che, fissato \bar{u} , la coppia (\bar{x}_1, \bar{x}_2) appartiene alla curva $\bar{u}\Gamma$. Quindi i punti di equilibrio sono i punti di intersezione fra le caratteristiche del compressore e della valvola (stiamo trascurando le perdite di carico nei condotti e assumendo costanti le pressioni a monte del compressore e a valle della valvola). Per studiare la natura dei punti di equilibrio linearizziamo il sistema intorno al punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$. Ponendo

$$\Psi' = \left. \frac{\partial \Psi(x_1)}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1} \quad (5.14)$$

$$\Gamma' = \left. \frac{\partial \Gamma(x_2)}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_2}, \quad (5.15)$$

si ottengono le seguenti matrici per il sistema linearizzato:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha \Psi' & -\alpha \\ \frac{1}{\beta} & -\frac{\bar{u}}{\beta} \Gamma' \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\Gamma(\bar{x}_2)}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è allora

$$p(s) = \det(sI - A) = s^2 + [-\alpha \Psi' + \frac{\bar{u}}{\beta} \Gamma']s + \frac{\alpha}{\beta} [1 - \bar{u} \Gamma' \Psi'].$$

Esaminando i segni dei coefficienti di tale polinomio si vede subito che una condizione *necessaria* per la stabilità è che il coefficiente di grado zero sia

positivo, ossia:

$$1 - \bar{u}\Gamma'\Psi' > 0.$$

Tale condizione equivale alla

$$\Psi' < \frac{1}{\bar{u}\Gamma'}.$$

Poiché $\frac{1}{\bar{u}\Gamma'}$ rappresenta la pendenza della curva $\bar{u}\Gamma$ riguardata come funzione della x_1 (si pensi alla regola di derivazione della inversa di funzione), da un punto di vista geometrico tale condizione significa che nel punto di intersezione la curva Γ deve avere pendenza maggiore Ψ . Questa condizione che, lo ripetiamo, è soltanto necessaria, assicura che il sistema reagisca a perturbazioni di pressione o portata in maniera opposta rispetto alla perturbazione stessa e prende il nome di *stabilità statica*. Condizione necessaria e sufficiente affinché le radici di un polinomio di secondo grado abbiano parte reale negativa è che tutti i segni dei coefficienti siano concordi, quindi in questo caso oltre alla condizione di stabilità statica deve aversi

$$-\alpha\Psi' + \frac{\bar{u}}{\beta}\Gamma' > 0,$$

da cui si vede che la stabilità del punto di equilibrio dipende anche dai coefficienti α e β , come è naturale attendersi.

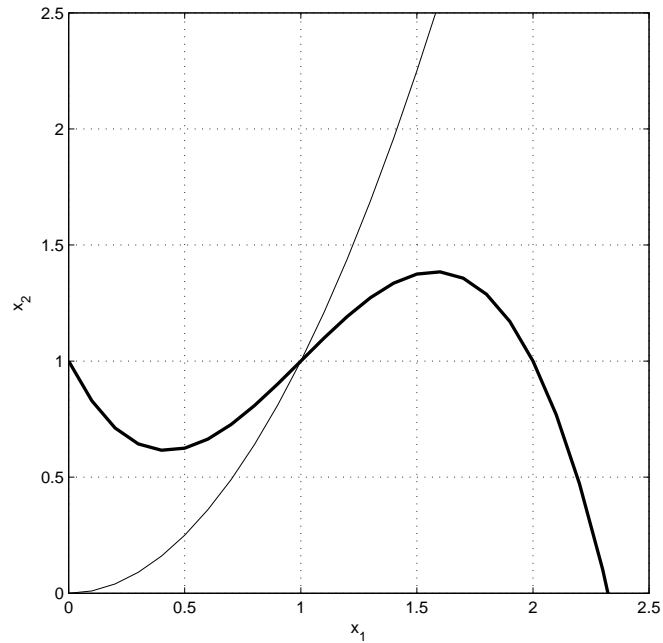


Figura 5.9:

Vediamo ora un esempio numerico in cui la caratteristica della valvola è modellata dalla

$$\Gamma(x_2) = \sqrt{x_2},$$

quella del compressore dalla

$$\Psi(x_1) = (x_1 - 1) - (x_1 - 1)^3 + 1,$$

e inoltre $\alpha, \beta = 1$. Si voglia studiare la stabilità del punto di equilibrio corrispondente alla portata $x_1 = \bar{x}_1 = 1$. Dalle condizioni di equilibrio (5.12) e (5.12) si ricava subito $x_2 = 1$, $\bar{u} = 1$. Il punto di equilibrio considerato è l'intersezione delle curve caratteristiche riportate in Fig.5.9. Inoltre, come è facile verificare, si ha:

$$\Psi' = \left. \frac{\partial \Psi(x_1)}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}_1} = 1 \quad (5.16)$$

$$\Gamma' = \left. \frac{\partial \Gamma(x_2)}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}_2} = \frac{1}{2}. \quad (5.17)$$

Pertanto la matrice di transizione del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio considerato è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$p(s) = \det(sI - A) = s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}.$$

Le radici di tale polinomio sono

$$s_{1,2} = \frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{3}}{4},$$

e sono complesse coniugate a parte reale positiva. Il punto di equilibrio considerato è pertanto instabile e ad esso sono associati modi oscillanti divergenti. Una perturbazione dell'equilibrio ha come effetto l'innescare di oscillazioni sempre più ampie della portata e della pressione. Per esercizio, verificare che per $\alpha = \frac{1}{2}$ il punto di equilibrio è marginalmente stabile e per $\alpha < \frac{1}{2}$ asintoticamente stabile.

5.3 Funzione di trasferimento

5.3.1 Calcolo di una funzione di trasferimento

Calcoliamo la funzione di trasferimento per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha - 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'espressione della f.d.t. è la seguente

$$w(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -(\alpha-2) & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La particolare struttura di B e C permette di evitare il calcolo completo della $(sI - A)^{-1}$: supponiamo di calcolare $C(sI - A)^{-1}B$ moltiplicando prima $(sI - A)^{-1}$ a destra per B e poi il vettore ottenuto a sinistra per C . Poiché B ha tutti gli elementi nulli tranne l'ultimo, moltiplicandola per $(sI - A)^{-1}$ si sortisce l'effetto di 'selezionare' la sola ultima colonna della $(sI - A)^{-1}$. D'altra parte, C ha tutti gli elementi nulli tranne il primo e pertanto 'seleziona' la sola prima riga del vettore colonna $(sI - A)^{-1}B$. In altre parole, $C(sI - A)^{-1}B$ sarà uguale all'elemento di indici $(1,3)$ (corrispondenti alla prima riga e all'ultima colonna) della matrice $(sI - A)^{-1}$. Applicando la formula seguente (cfr. pag.39)

$$[(sI - A)^{-1}]_{ij} = \frac{\Delta_{ij}(s)}{p(s)},$$

si ha subito

$$w(s) = \frac{\Delta_{31}(s)}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{s + \alpha - 3}{(s-1)(s+1)(s+2)}.$$

A questo stesso risultato si può pervenire calcolando denominatore come $\det(sI - A)$ e numeratore

$$N(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} s+1 & -(\alpha-2) & -1 & 0 \\ 0 & s-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osservazione Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$, pertanto il sistema è instabile ed ha due modi stabili associati agli autovalori negativi λ_2 e λ_3 e un modo instabile, associato a λ_1 . L'informazione relativa al modo instabile è data dalla presenza del fattore $(s-1)$ a denominatore della funzione di trasferimento. Il denominatore della funzione di trasferimento conserva l'informazione relativa al modo instabile a patto che non si verifichi una cancellazione relativa al modo instabile cioè a patto che si abbia $s + \alpha - 3 \neq s - 1$, ovvero $\alpha \neq 2$. In caso contrario la funzione di trasferimento diventerebbe

$$w(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

e l'informazione relativa al modo instabile andrebbe perduta.

5.3.2 Calcolo della risposta tramite funzione di trasferimento

Calcoliamo la risposta $y(t)$ del sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$w(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

agli ingressi $u(t) = 1(t)$ (gradino), $u(t) = \delta(t)$ (impulso), $u(t) = e^{-4t}$, $t \geq 0$.

Poiché la trasformata di Laplace del gradino è $u(s) = \frac{1}{s}$, la trasformata dell'uscita è :

$$y(s) = w(s)u(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Per calcolare $y(t)$ conviene esprimere $y(s)$ come sommatoria di fratti semplici

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}, \quad (5.18)$$

dove le costanti A , B , C e D si determinano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) &&= 1/6 \\ B &= \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)y(s) &&= -1/2 \\ C &= \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)y(s) &&= 1/2 \\ D &= \lim_{s \rightarrow -3} (s+3)y(s) &&= -1/6. \end{aligned}$$

Alternativamente si poteva scrivere la (5.18) in questo modo:

$$\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{N(s)}{s(s+1)(s+2)(s+3)},$$

dove

$$N(s) = (s+1)(s+2)(s+3)A + s(s+2)(s+3)B + s(s+1)(s+3)C + s(s+1)(s+2)D$$

ed eguagliare i coefficienti dei polinomi di terzo grado a numeratore dei due membri, ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + C + D \\ 0 &= 6A + 5B + 4C + 3D \\ 0 &= 11A + 6B + 3C + 2D \\ 1 &= 6A, \end{aligned}$$

rispettivamente per i coefficienti di s^3 , s^2 , s^1 e s^0 . Si tratta di un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite risolvendo il quale si perviene agli stessi valori di A , B , C e D determinati in precedenza. Si può dunque scrivere

$$y(s) = \frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+3)}.$$

Ricordando che $\frac{1}{s+\lambda}$ è la trasformata di Laplace di $e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ e la proprietà di linearità della trasformazione, si ha

$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}, \quad t \geq 0,$$

il cui andamento è riportato in Fig.5.10. Osserviamo che, per $t \rightarrow \infty$, $y(t)$ tende asintoticamente a $1/6$ (che è il guadagno statico), come è confermato dal teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sy(s) = 1/6.$$

La risposta all'impulso può essere calcolata (e si invita a farlo per esercizio)

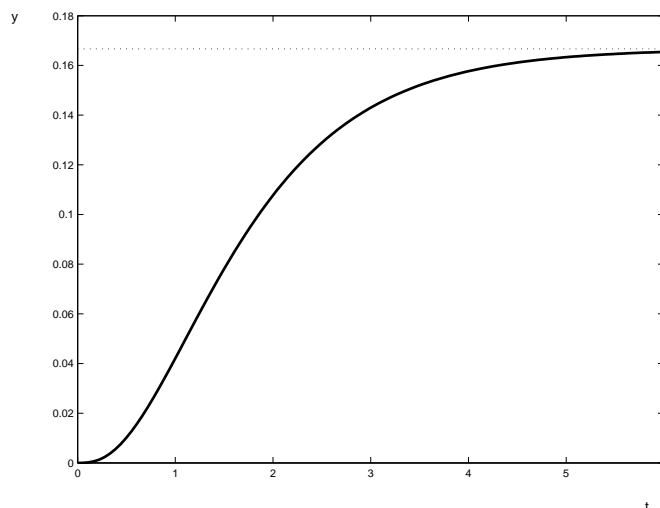


Figura 5.10:

con il metodo illustrato al punto precedente ponendo $u(s) = 1$ (ossia la trasformata dell'impulso). Osserviamo tuttavia che detta $y_G(s)$ la trasformata della risposta al gradino (a partire da condizioni iniziali nulle) e $y_I(s)$ la trasformata della risposta all'impulso (sempre da condizioni iniziali nulle), si ha

$$y_I(s) = sy_G(s)$$

e quindi, ricordando che $\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$ e ponendo $y(0) = 0$ si ottiene

$$y_I(t) = \frac{dy_G(t)}{dt}.$$

Dunque la risposta all'impulso è la derivata della risposta al gradino. Pertanto è sufficiente derivare l'espressione della risposta al gradino trovata al punto precedente, ottenendo:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0,$$

il cui andamento è riportato in Fig.5.11. Per finire, la trasformata di La-

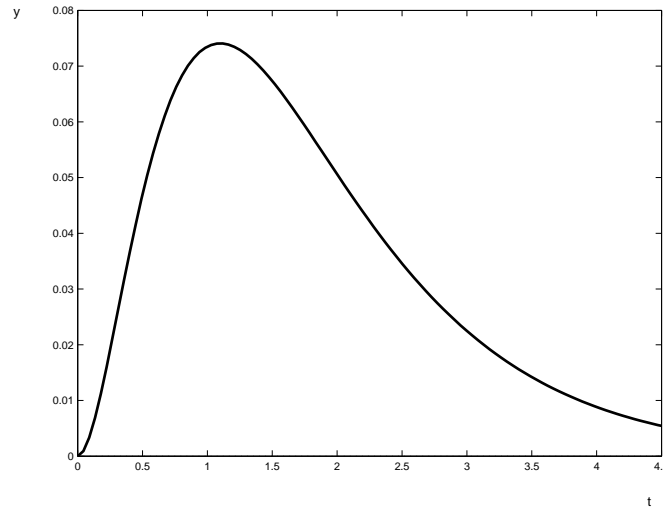


Figura 5.11:

place dell'ingresso $u(t) = e^{-4t}$, $t \geq 0$ è $u(s) = \frac{1}{s+4}$, dunque la trasformata dell'uscita è

$$y(s) = w(s)u(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Ricorrendo ad uno dei metodi illustrati in precedenza, $y(s)$ può essere così scomposta

$$y(s) = \frac{1}{6(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{6(s+4)},$$

da cui

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-4t}, \quad t \geq 0,$$

il cui andamento è riportato in Fig.5.12.

5.3.3 Calcolo della risposta tramite funzione di trasferimento

Consideriamo il circuito di Fig.5.13 e calcoliamone la risposta al gradino $u(t) = 1$, $t > 0$ e al segnale $u(t) = \cos(2t)$, $t > 0$ per $R_1, R_2, C, L = 1$.

Come variabili di stato possiamo sempre prendere le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti che attraversano gli induttori (cioè le grandezze che rappresentano l'energia accumulata nel sistema). Chiamiamo $x_1(t)$ la tensione ai capi di C e $x_2(t)$ la corrente che attraversa L . Dalla maglia CR_2L otteniamo l'equazione

$$x_1(t) = R_2x_2(t) + L\dot{x}_2(t).$$

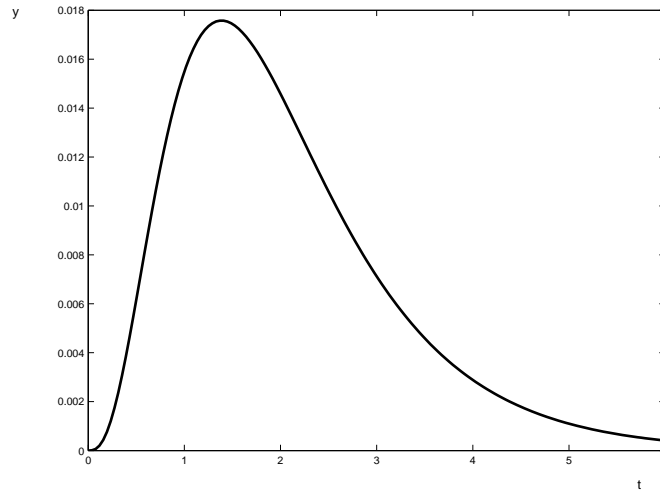


Figura 5.12:

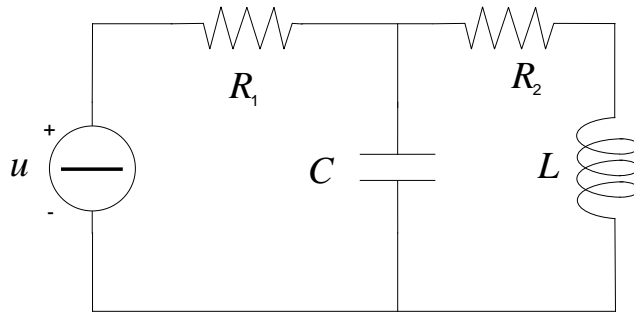


Figura 5.13:

Dalla maglia uR_1C otteniamo

$$u(t) = R_1 I_1(t) + x_1(t) \quad (5.19)$$

$$= R_1 [C \dot{x}_1(t) + x_2(t)] + x_1(t), \quad (5.20)$$

infatti la corrente $I_1(t)$ che attraversa R_1 è pari alla somma della corrente che attraversa L (cioè $x_2(t)$) e di quella che attraversa C , cioè $\frac{d}{dt}(Cx_1(t)) = C\dot{x}_1(t)$. La rappresentazione di stato risulta quindi:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_1 C} x_1(t) - \frac{1}{C} x_2(t) + \frac{1}{R_1 C} u(t) \quad (5.21)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{L} x_1(t) - \frac{R_2}{L} x_2(t). \quad (5.22)$$

Ossia

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Se assumiamo come uscita la tensione ai capi di C , la trasformazione d'uscita sarà

$$y(t) = [1 \quad 0]x(t).$$

Il polinomio caratteristico è

$$p(s) = \det \left(\begin{bmatrix} s + \frac{1}{R_1 C} & +\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \right) = s^2 + \left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{R_1 C} \right) s + \frac{R_2}{R_1 L C} + \frac{1}{L C}.$$

La funzione di trasferimento è

$$w(s) = C(sI - A)^{-1}B = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s + \frac{1}{R_1 C} & +\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R_2}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando la formula di pag.39 (per la particolare forma di B e C è sufficiente calcolare un solo elemento della $(sI - A)^{-1}$) si ottiene

$$w(s) = \frac{\left(s + \frac{R_2}{L}\right) \frac{1}{R_1 C}}{p(s)} = \frac{Ls + R_2}{R_1 L C s^2 + (L + R_1 R_2 C)s + R_1 + R_2}.$$

Sostituendo i valori numerici si ha

$$w(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2}.$$

Le radici del denominatore sono

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm j,$$

quindi il sistema è asintoticamente stabile e presenta modi oscillanti (smorzati) che sono

$$e^{-t} \cos t, \quad e^{-t} \sin t.$$

Per calcolare la risposta al gradino scriviamo la risposta come prodotto della funzione di trasferimento per la trasformata del gradino

$$y(s) = w(s)u(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 2} \frac{1}{s},$$

ed esprimiamola come somma di fratti semplici

$$\frac{s + 1}{(s^2 + 2s + 2)s} = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 2} + \frac{C}{s} = \frac{(A + C)s^2 + (B + 2C)s + 2C}{(s^2 + 2s + 2)s},$$

da cui

$$A + C = 0 \tag{5.23}$$

$$B + 2C = 1 \tag{5.24}$$

$$2C = 1. \tag{5.25}$$

Risolvendo il sistema si trova $A = -1/2$, $B = 0$, $C = 1/2$ quindi la risposta al gradino può essere scritta come

$$y(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2 + 2s + 2} - \frac{1}{s} \right) \quad (5.26)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{1}{s} \right). \quad (5.27)$$

Ricordando che

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s - \xi}{(s - \xi)^2 + \omega^2} \right] = e^{\xi t} \cos(\omega t), \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega}{(s - \xi)^2 + \omega^2} \right] = e^{\xi t} \sin(\omega t),$$

e antitrasformando ciascuno dei termini si ottiene la seguente espressione per la risposta al gradino:

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} \cos(t) + \frac{1}{2} e^{-t} \sin(t) + \frac{1}{2},$$

il cui andamento è riportato in Fig.5.14.

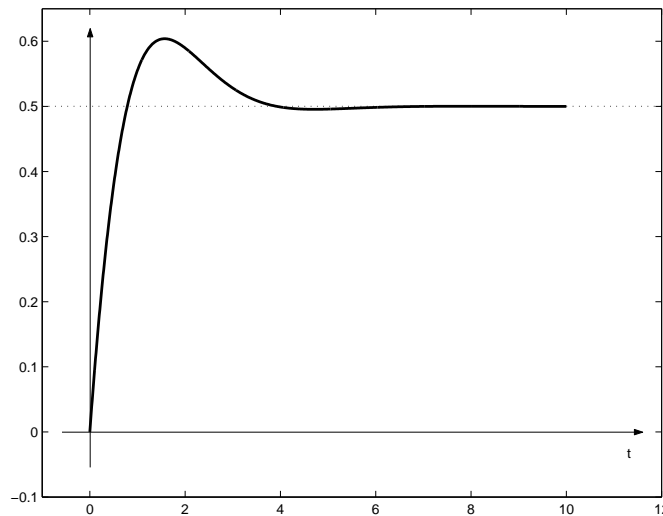


Figura 5.14:

Calcoliamo ora la risposta all'ingresso $u(t) = \cos(2t)$, la cui trasformata è $u(s) = \frac{s}{s^2+4}$. Si ha

$$y(s) = w(s)u(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2} \frac{s}{s^2 + 4}.$$

eq uindi, esprimendo la $w(s)$ come somma di fratti semplici si ottiene

$$\frac{s^2 + s}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 4)} = \frac{As + B}{s^2 + 2s + 2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}.$$

Portando a denominatore comune ed applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene

$$A = -\frac{3}{10} \quad (5.28)$$

$$B = \frac{1}{10} \quad (5.29)$$

$$C = \frac{3}{10} \quad (5.30)$$

$$D = \frac{3}{10}, \quad (5.31)$$

$$(5.32)$$

per cui si può scrivere

$$y(s) = \frac{-\frac{3}{10}s + \frac{1}{10}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{\frac{3}{10}s + \frac{3}{10}}{s^2 + 4}.$$

Osserviamo che il primo addendo contiene i modi propri del sistema e corrisponde alla parte transitoria della risposta forzata. Il secondo addendo invece corrisponde alla parte a regime della risposta forzata. La parte transitoria può essere scritta nel modo seguente:

$$y_T(s) = \frac{-\frac{3}{10}s + \frac{1}{10}}{s^2 + 2s + 2} \quad (5.33)$$

$$= -\frac{3}{10} \frac{s - \frac{1}{3}}{s^2 + 2s + 2} \quad (5.34)$$

$$= -\frac{3}{10} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{4}{3} \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right] \quad (5.35)$$

pertanto, antitrasformando si ottiene

$$y_T(t) = -\frac{3}{10}e^{-t} \cos(t) + \frac{2}{5}e^{-t} \sin(t).$$

Tale componente della risposta forzata tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

La parte a regime può essere scritta nel modo seguente:

$$y_R(s) = \frac{3}{10} \frac{s+1}{s^2 + 4} \quad (5.36)$$

$$= \frac{3}{10} \left[\frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2 + 4} \right] \quad (5.37)$$

pertanto, antitrasformando si ottiene

$$y_R(t) = \frac{3}{10} \cos(2t) + \frac{3}{20} \sin(2t).$$

La risposta al segnale $u(t) = \cos(2t)$ è pertanto

$$y(t) = y_T(t) + y_R(t) = -\frac{3}{10}e^{-t} \cos(t) + \frac{2}{5}e^{-t} \sin(t) + \frac{3}{10} \cos(2t) + \frac{3}{20} \sin(2t).$$

In Fig.5.15 è riportato l'andamento di $y(t)$. Si può notare che dopo circa 3 secondi il contributo della parte transitoria si estingue.

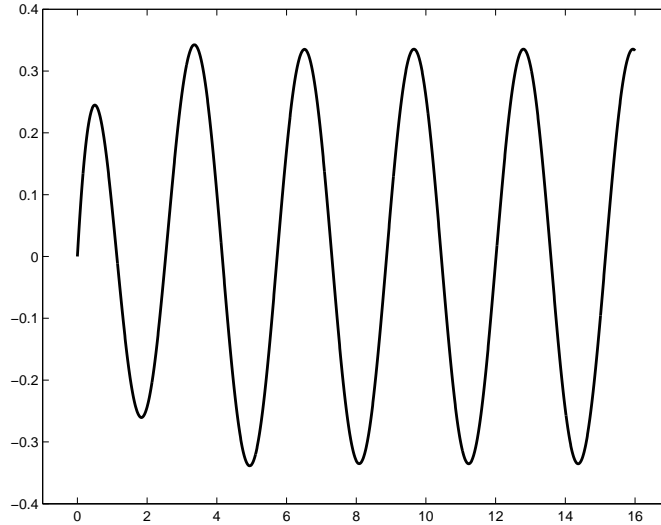


Figura 5.15:

5.3.4 Filtraggio di una misura

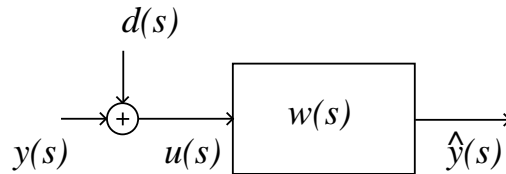


Figura 5.16:

Supponiamo di voler misurare una grandezza costante $y(t) = \bar{y}$ e supponiamo che la misura sia affetta da un disturbo $d(t) = \mu \sin(\omega_d t)$. Cioè lo strumento di misura fornisce il valore $u(t) = \bar{y} + \mu \sin(\omega_d t)$. Tale misura può essere filtrata attraverso un opportuno filtro passa-basso per attenuare il disturbo, per esempio il filtro del primo ordine avente la seguente funzione di trasferimento:

$$w(s) = \frac{1}{1 + \tau s}, \quad \tau > 0.$$

La situazione è schematizzata in Fig.5.16 (dove con \hat{y} si è indicato il segnale filtrato) mentre in Fig.5.17 è riportata la risposta in frequenza del filtro (in ampiezza e fase) per $\tau = 1$ (linea continua) e per $\tau = 10$ (linea punteggiata). Il filtro lascia inalterata la componente continua (ossia quella di pulsazione $\omega = 0$) e attenua tutte le altre componenti. Maggiore è il valore di τ , maggiore è la attenuazione a parità di frequenza (come si può verificare

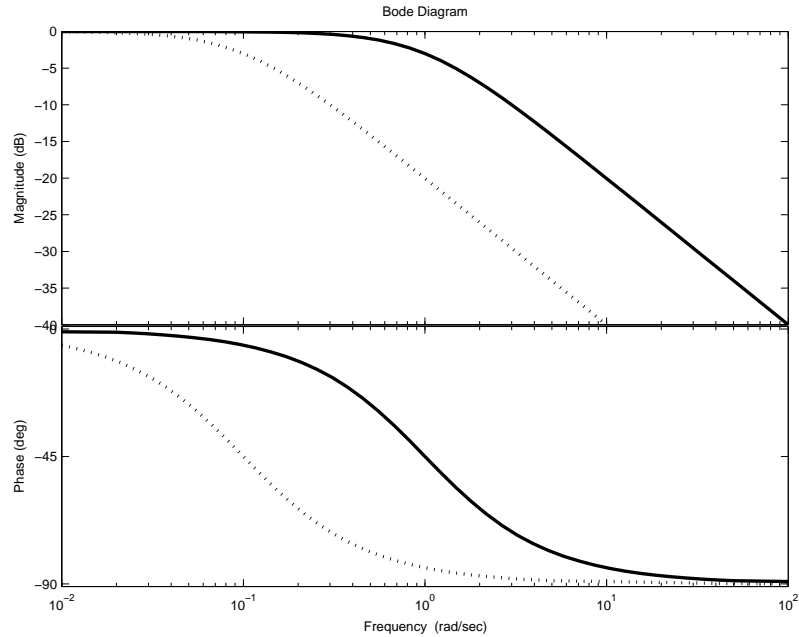


Figura 5.17:

calcolando $|w(j\omega)|$ per diversi valori di τ). Pertanto, dovendo misurare un segnale costante e sapendo che il disturbo ha una pulsazione $\omega_d > 0$, scegliere τ il più grande possibile (in modo da attenuare il disturbo il più possibile) potrebbe sembrare la cosa migliore da farsi. Tuttavia dalla scelta di τ dipende anche il tempo di risposta del filtro che aumenta all'aumentare di τ . Applicando la sovrapposizione degli effetti, la risposta del filtro ad un ingresso del tipo

$$u(t) = \bar{y} + \mu \sin(\omega_d t)$$

può essere calcolata come la somma della risposta ad un gradino di ampiezza \bar{y} e della risposta ad una sinusoide di ampiezza μ e pulsazione ω_d . Quest'ultima sarà, a regime, una sinusoide di pulsazione ω_d , ampiezza $\mu|w(j\omega_d)|$ e fase $\arg(w(j\omega_d))$. La risposta al gradino invece può essere scritta nel modo seguente

$$\hat{y}_G(s) = \frac{\bar{y}}{(1 + \tau s)s} = \bar{y} \left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{1 + \tau s} \right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\hat{y}_G(t) = \bar{y}(1 - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Si vede dunque che per τ grande l'esponenziale è più "lento" e così la convergenza della componente continua del segnale filtrato al valore \bar{y} è più lenta. In Fig.5.18 sono riportate le risposte al gradino unitario dei filtri corrispondenti a $\tau = 1$ (linea continua) e $\tau = 10$ (linea punteggiata). Infine, in

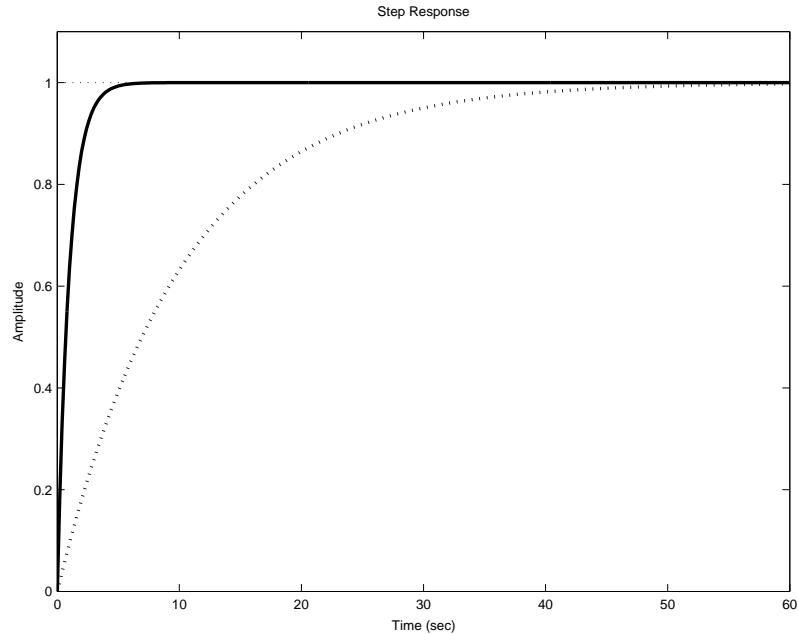


Figura 5.18:

Fig.5.19 sono riportate le risposte dei filtri corrispondenti a $\tau = 1$ (linea continua nera) e $\tau = 10$ (linea punteggiata) all'ingresso $u(t) = 1 + 0.5 \sin(2t)$, riportato in grigio. Si vede che per $\tau = 10$ l'attenuazione del disturbo è maggiore rispetto al caso $\tau = 0$ ma la risposta è molto più lenta.

5.4 Controllo in retroazione

5.4.1 Sistema termico

Consideriamo il sistema termico illustrato in Fig.5.20, in cui una potenza q viene immessa in una caldaia il cui fluido si trova alla temperatura θ_c e riscalda una stanza la cui temperatura è θ_{int} . La stanza a sua volta scambia calore con l'ambiente esterno che si trova alla temperatura θ_{est} . Il sistema è retto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{\theta}_c = \mu q - \alpha(\theta_c - \theta_{int}) \quad (5.38)$$

$$\dot{\theta}_{int} = \beta(\theta_c - \theta_{int}) - \gamma(\theta_{int} - \theta_{est}), \quad (5.39)$$

dove $\mu, \alpha, \beta, \gamma > 0$ sono costanti opportune. Ponendo $x_1 = \theta_c, x_2 = \theta_{int}$, $u_1 = \mu q, u_2 = \theta_{est}$ si ottiene

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta - \gamma \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} u(t),$$

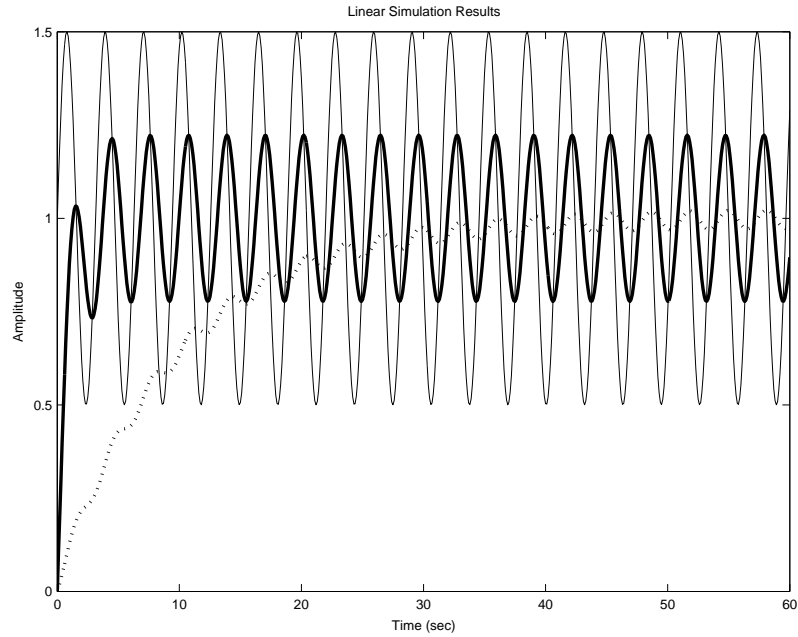


Figura 5.19:

ossia si tratta di un sistema lineare del secondo ordine avente due ingressi (la potenza termica fornita e la temperatura esterna). Il sistema è asintoticamente stabile, infatti il polinomio caratteristico risulta essere

$$p(s) = \det(sI - A) = s^2 + (\alpha + \beta + \gamma)s + \alpha\gamma$$

che per α, β, γ tutti positivi ha radici a parte reale negativa (regola di Cartesio). Essendo il sistema stabile, ogni ingresso costante è di equilibrio per il sistema. Supponiamo che la temperatura esterna sia $u_2(t) = \bar{u}_2$ e che la potenza termica fornita sia $u_1(t) = \bar{u}_1$. Quale è allora lo stato di

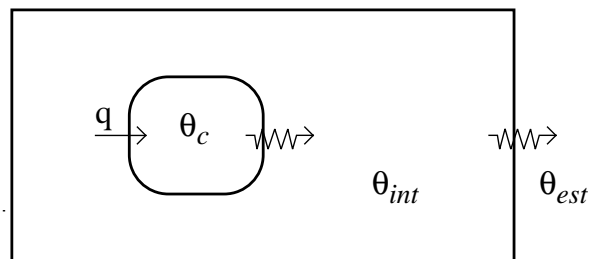


Figura 5.20:

equilibrio? Imponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, si ricava facilmente

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{\beta}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\alpha}\right)\bar{u}_1 + \bar{u}_2 \quad (5.40)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\beta}{\alpha\gamma}\bar{u}_1 + \bar{u}_2. \quad (5.41)$$

La seconda uguaglianza mostra che la temperatura x_2 della stanza si porta all'equilibrio ad un valore che è pari alla temperatura esterna \bar{u}_2 più un termine proporzionale alla potenza termica immessa. Vediamo ora cosa accade se anziché fornire alla caldaia una potenza termica costante $u_1(t) = \bar{u}_1$ si ha

$$u_1(t) = -k(x_2(t) - \hat{x}_2) = -ke(t),$$

dove \hat{x}_2 è la temperatura desiderata per la stanza. Stiamo cioè fornendo tanta più potenza quanto maggiore è la differenza fra la temperatura effettiva della stanza e quella che vogliamo ottenere. Supponiamo per semplicità che la temperatura esterna sia $\bar{u}_2 = 0$ (con un cambio di coordinate è sempre possibile ricondursi a questo caso). Imponendo $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ e sostituendo $u_1(t) = -k(x_2(t) - \hat{x}_2)$, otteniamo

$$0 = -\alpha x_1 + \alpha x_2 - k(x_2 - \hat{x}_2) \quad (5.42)$$

$$0 = \beta x_1 - (\beta + \gamma)x_2, \quad (5.43)$$

da cui si ricava in particolare che la temperatura \bar{x}_2 di equilibrio è

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha\gamma}{\beta k}} \hat{x}_2.$$

Si vede dunque che comunque si scelga k , la strategia $u_1(t) = -k(x_2(t) - \hat{x}_2)$ non permette di ottenere un valore di equilibrio \bar{x}_2 pari al valore desiderato \hat{x}_2 . È chiaro d'altra parte che scegliendo k abbastanza grande si può rendere la temperatura \bar{x}_2 prossima quanto si vuole al valore desiderato.

Supponiamo ora di adottare una strategia differente e cioè imponiamo un ingresso la cui trasformata è

$$u_1(s) = -k_P e(s) - k_I \frac{e(s)}{s}.$$

In altre parole l'ingresso è costituito da una parte proporzionale all'errore e da una parte proporzionale all'integrale dell'errore (si ricordi che un blocco la cui funzione di trasferimento è $\frac{1}{s}$ è un integratore, cioè la sua uscita è l'integrale dell'ingresso). Per studiare cosa accade in questo caso conviene lavorare nel dominio delle frequenze. Scegliendo come uscita del sistema la temperatura della stanza, cioè

$$y(t) = x_2(t)$$

e come unico ingresso l'ingresso $u(t) = u_1(t)$ ($u_2(t)$ come detto è posto a zero) si ottiene la seguente rappresentazione di stato:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta - \gamma \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La funzione di trasferimento del sistema è pertanto

$$w(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\beta}{s^2 + (\alpha + \beta + \gamma)s + \alpha\gamma}.$$

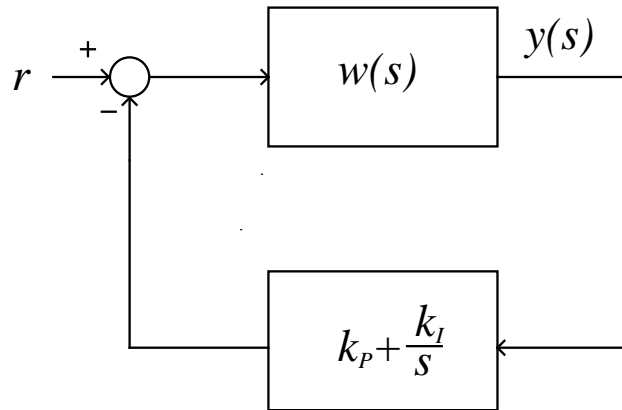


Figura 5.21:

La situazione è schematizzata in Fig.5.21 dove anziché \hat{x}_2 è stato riportato un generico riferimento r . Vediamo come si comporta il sistema così retroazionato quando il riferimento r assume un valore costante e diverso da zero. Si tratta di analizzare la risposta al gradino del sistema di Fig.5.21 dove r è riguardato come ingresso. Ricordando la formula della funzione di trasferimento di due blocchi in retroazione negativa e ponendo $r(s) = \frac{\hat{x}_2}{s}$ cioè sollecitando il sistema con un gradino di ampiezza pari alla uscita desiderata si ottiene

$$y(s) = w_{cl}(s)r(s) = \frac{w(s)(k_P + \frac{k_I}{s})}{1 + w(s)(k_P + \frac{k_I}{s})} \frac{\hat{x}_2}{s},$$

dove con $w_{cl}(s)$ abbiamo indicato la funzione di trasferimento ad anello chiuso fra r e y . Se tale funzione di trasferimento è stabile si può applicare il teorema del valore finale per trovare la temperatura di equilibrio, ossia

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{w(s)(k_P + \frac{k_I}{s})}{1 + w(s)(k_P + \frac{k_I}{s})} \frac{\hat{x}_2}{s} \right] = \frac{k_I}{k_I} \hat{x}_2 = \hat{x}_2.$$

Dunque introducendo un termine proporzionale all'integrale dell'errore si riesce a rendere nullo, a regime, l'errore fra l'uscita desiderata e quella effettiva. Si noti che, a differenza del caso precedente, in cui il blocco di

retroazione era *statico* (un fattore moltiplicativo fra l'uscita e l'ingresso) in quest'ultimo caso il blocco di retroazione è un vero e proprio sistema dinamico. Ribadiamo che il risultato appena trovato è valido solo se la funzione di trasferimento ad anello chiuso $w_{cl}(s)$ è stabile (altrimenti la risposta al gradino non converge e quindi il teorema del valore finale non è applicabile). Studiamo ora quali sono i valori di k_P e k_I per i quali si ottiene una funzione di trasferimento ad anello chiuso stabile. Si tratta di studiare i poli della $w_{cl}(s)$ (cioè gli zeri del suo denominatore) e per fare ciò ricordiamo che il principio della dinamica di anello afferma che il denominatore di una funzione di trasferimento di anello è pari alla somma del prodotto fra i numeratori e di quello fra i denominatori di tutte le funzioni di trasferimento dell'anello. In questo caso le funzioni di trasferimento sono due:

$$\frac{\beta}{s^2 + (\alpha + \beta + \gamma)s + \alpha\gamma} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

e

$$k_P + \frac{k_I}{s} = \frac{k_P s + k_I}{s} = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}.$$

Il denominatore della funzione di trasferimento di anello risulta dunque

$$\begin{aligned} D_{cl}(s) &= N_1(s)N_2(s) + D_1(s)D_2(s) \\ &= \beta(k_P s + k_I) + (s^2 + (\alpha + \beta + \gamma)s + \alpha\gamma)(s) \\ &= s^3 + (\alpha + \beta + \gamma)s^2 + (\alpha\gamma + \beta k_P)s + \beta k_I. \end{aligned}$$

La tabella di Routh-Hurwitz di tale polinomio è

1	$\alpha\gamma + \beta k_P$
$\alpha + \beta + \gamma$	βk_I
$\frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\gamma + \beta k_P) - \beta k_I}{\alpha + \beta + \gamma}$	0
βk_I	0

Condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è che gli elementi della prima colonna abbiano lo stesso segno. Ricordando che $\alpha, \beta, \gamma > 0$ si ottiene allora che devono essere soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\gamma + \beta k_P) - \beta k_I > 0 \\ \beta k_I > 0 \end{cases}, \quad (5.44)$$

che sono equivalenti alle

$$\begin{cases} k_I < \frac{(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\gamma}{\beta} + (\alpha + \beta + \gamma)k_P \\ k_I > 0 \end{cases}. \quad (5.45)$$

La regione di stabilità sul piano (k_P, k_I) è dunque l'intersezione di due semipiani. In Fig.5.22 è riportata tale regione di stabilità per $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

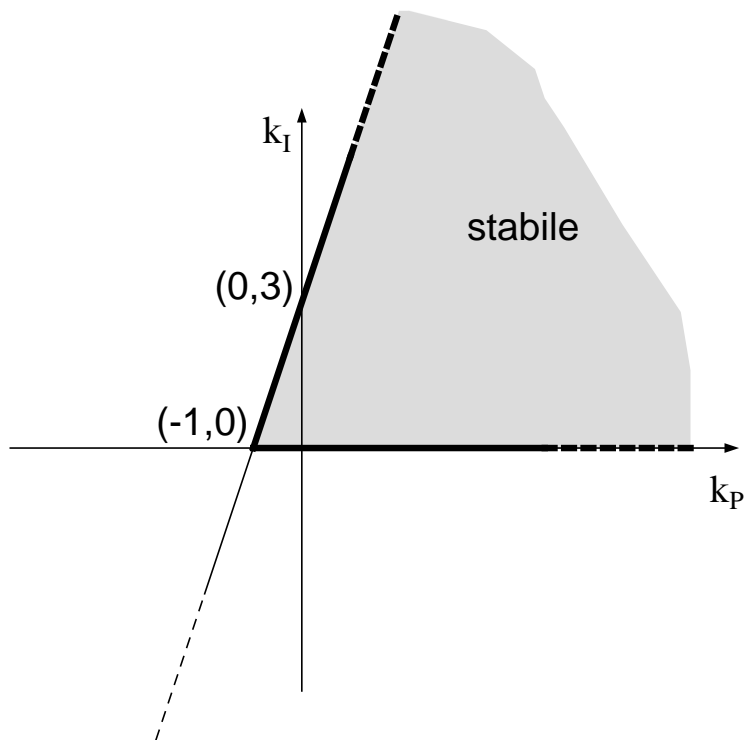


Figura 5.22:

Capitolo 6

Elementi di matematica

In questa sezione si richiameranno brevemente i concetti fondamentali di matematica necessari per lo studio dei sistemi dinamici. In particolare saranno riportate le nozioni relative all'algebra vettoriale utili alla formalizzazione di concetti importanti.

6.1 Algebra lineare

In questa sezione si richiameranno brevemente i concetti fondamentali di algebra lineare necessari per la comprensione.

6.1.1 Spazi vettoriali

Uno spazio vettoriale X su un corpo numerico \mathcal{C} è un insieme avente le seguenti proprietà

1. Se $x \in X$ e $\lambda \in \mathcal{C}$ allora $\lambda x \in X$.
2. Se $x_1, x_2 \in X$ allora $x_1 + x_2 \in X$.

Noi considereremo esclusivamente spazi vettoriali aventi come corpo \mathfrak{R} .

Definizione: Insieme di generatori Un insieme di vettori $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ è detto *insieme di generatori* se qualsiasi elemento $x \in X$ è scrivibile come combinazione lineare di tali vettori, cioè

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

Definizione: Insieme di vettori linearmente indipendenti Un insieme di vettori $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ è detto *linearmente indipendente* se la condizione

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

implica che $\lambda_i = 0$ per ogni i (cioè se l'unica loro combinazione lineare che è uguale al vettore nullo è quella avente nulli tutti i coefficienti).

Definizione: Base Un insieme di vettori $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ è detto *base* se è un insieme di generatori linearmente indipendenti.

Una base ha la proprietà che ogni vettore x è esprimibile in modo unico come

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n,$$

cioè i coefficienti λ_i sono univocamente determinati da x .

Assegnato uno spazio vettoriale X , una sua base non è univocamente determinata. Ma se una base di X è formata da n elementi, ogni altra base è formata da n elementi. Tale numero è un invariante ed ha una importanza notevole.

Definizione: Dimensione Si dice dimensione dello spazio vettoriale X il numero degli elementi di ogni sua base e si indica con

$$\text{Dim}(X).$$

Esempio: spazio dei polinomi di ordine 4 Consideriamo lo spazio dei polinomi reali di grado 4 o inferiore ovvero di funzioni del tipo

$$p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4.$$

Si può provare che si tratta di uno spazio vettoriale (farlo per esercizio). Gli elementi

$$1, x, x^2, x^3, x^4$$

formano una base, quindi tale spazio ha dimensione 5.

Esempio: spazio euclideo Consideriamo lo spazio dei vettori a 3 componenti reali, del tipo $x = [\alpha, \beta, \gamma]^T$. Si tratta di uno spazio vettoriale (verificarlo per esercizio) di dimensione 3. Infatti una base è

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tale base viene detta base *canonica*.

Esempio: spazio nullo L'insieme $X = \{0\}$, che contiene il solo vettore nullo è detto *spazio nullo* o *spazio banale* ed ha per definizione dimensione zero.

Definizione: Sottospazio Un sottoinsieme X_1 di X che sia a sua volta uno spazio vettoriale è detto *sottospazio*. Dati due sottospazi X_1 e X_2 , le seguenti operazioni danno origine a sottospazi:

- Intersezione:

$$X_1 \cap X_2 = \{x : x \in X_1, \text{ e } x \in X_2\}$$

- Somma:

$$X_1 + X_2 = \{x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in X_1, \text{ e } x_2 \in X_2\}$$

Definizione: Somma diretta Due sottospazi si dicono *in somma diretta* se qualsiasi elemento x appartenente al sottospazio somma è scrivibile come $x = x_1 + x_2$ dove $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$ sono univocamente determinati. Si dimostra che la somma è diretta se e solo se

$$X_1 \cap X_2 = \{0\}.$$

Quando la somma è diretta si usa la notazione

$$X = X_1 \oplus X_2.$$

Fissata una base v_1, v_2, \dots, v_n , ogni vettore dello spazio vettoriale è scrivibile nella forma

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n,$$

dove le componenti x_1, x_2, \dots, x_n sono univocamente determinate. Pertanto esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori v e le ennuple di numeri (x_1, \dots, x_n)

$$v \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n$$

dove \mathfrak{R}^n è l'insieme delle ennuple reali. Per esempio il polinomio $3 + 5x + x^4$ è associabile alla ennupla $(3, 5, 0, 0, 1)$.

Per questo, senza perdita di generalità noi considereremo lo spazio \mathfrak{R}^n delle ennuple reali (all'occorrenza C^n , lo spazio delle ennuple complesse).

6.1.2 Matrici

Una applicazione lineare dallo spazio \mathfrak{R}^n allo spazio \mathfrak{R}^m è rappresentabile da una matrice $m \times n$. Essendo A tale matrice e $y \in \mathfrak{R}^m$ e $x \in \mathfrak{R}^n$ si ha

$$y = Ax$$

cioè

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

dove i coefficienti y_i si calcolano come

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

La composizione di due applicazioni lineari rappresentate da matrici A e B

$$\mathfrak{R}^n \xrightarrow{A} \mathfrak{R}^m \xrightarrow{B} \mathfrak{R}^p$$

è lineare. Se $y = Ax$ e $z = By$

$$z = By = B(Ax) = (BA)x = Cx.$$

Se B ha dimensioni $(p \times m)$ e A ha dimensioni $(m \times n)$, la matrice C ha dimensioni $(p \times n)$ e il suo generico elemento è dato da

$$[C]_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Definizione: Immagine Dicesi *immagine* di una matrice $(m \times n)$ l'insieme

$$Ra(A) = \{y = Ax, \quad x \in \mathfrak{R}^n\} \subseteq \mathfrak{R}^m.$$

Tale insieme è un sottospazio di \mathfrak{R}^m , come è facile verificare.

Definizione: Nucleo Dicesi *nucleo* di una matrice $(m \times n)$ l'insieme

$$Ker(A) = \{x : Ax = 0\} \subseteq \mathfrak{R}^n.$$

Tale insieme è un sottospazio di \mathfrak{R}^n , come è facile verificare.

Determinante Se una matrice è quadrata $(n \times n)$ è possibile definire una funzione detta *determinante*. Data la ennupla fondamentale $(1, 2, \dots, n)$ e una permutazione

$$p = (j_1, j_2, \dots, j_n)$$

si dice che la permutazione ha classe pari = 2 se il numero di scambi di oggetti per arrivare dalla fondamentale è pari, altrimenti si dice di classe dispari = 1. Detto P l'insieme di permutazioni della fondamentale il determinante è definito come

$$Det(A) = \sum_{p \in P} (-1)^{cl(p)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

Si dimostra che vale anche la

$$Det(A) = Det(A^T) = \sum_{p \in P} (-1)^{cl(p)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}.$$

Valgono le seguenti formule di calcolo del determinante per righe o per colonne. Definiamo come \hat{A}_{ij} la matrice complementare all'elemento (i, j) ovvero la sottomatrice quadrata ottenuta da A sopprimendo la riga i -esima e la colonna j -esima. Allora si ha che

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \hat{A}_{ij}, \quad \text{per ogni } i$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \hat{A}_{ij}, \quad \text{per ogni } j$$

Una matrice quadrata a determinante nullo (non nullo) si dice *singolare* (*non singolare*). Valgono le proprietà notevoli

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

e

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Vale poi il seguente fondamentale risultato.

Teorema della caratteristica Si considerino i numeri \hat{n} = il massimo numero di colonne linearmente indipendenti; \hat{m} = il massimo numero di righe linearmente indipendenti; \hat{r} = la dimensione della massima sottomatrice quadrata avente determinante non nullo. Allora vale

$$\hat{n} = \hat{m} = \hat{r}.$$

Definizione: Rango $\hat{n} = \hat{m} = \hat{r}$ è detto *rango* della matrice e si indica con

$$\text{Rank}(A).$$

Se la matrice $m \times n$ ha rango pari al massimo possibile (cioè il minimo tra m e n , numero di righe e di colonne) si dice *a rango pieno*. In particolare, una matrice quadrata ha rango pieno solo se il suo determinante è non nullo.

Data la matrice A ($m \times n$) la matrice trasposta A^T è la matrice $n \times m$ i cui elementi sono

$$[A^T]_{ij} = a_{ji}.$$

La trasposta del prodotto è il prodotto delle trasposte in ordine contrario

$$(A B C \dots)^T = (\dots C^T B^T A^T).$$

Per una matrice $m \times n$ A valgono le seguenti relazioni:

$$m = \text{Rank}(A) + \text{Dim}(\text{Ker}(A))$$

$$n = \text{Rank}(A) + \text{Dim}(\text{Ker}(A^T)).$$

Data una matrice quadrata A ($m \times n$) e un vettore $b \in \mathfrak{R}^m$, consideriamo il sistema di equazioni

$$Ax = b.$$

Tale sistema ha come insieme generale delle soluzioni l'insieme dei vettori

$$\bar{x} + \tilde{x}$$

dove \bar{x} è una qualunque soluzione e $\tilde{x} \in Ker(A)$.

Data una matrice quadrata A ($n \times n$) e un vettore $b \in \mathfrak{R}^n$, consideriamo il sistema di equazioni

$$Ax = b.$$

Affinché tale sistema ammetta soluzione *unica* deve essere $Ker(A) = \{0\}$. Quindi A deve avere rango pieno ovvero deve essere $det(A) \neq 0$.

Definizione: matrice inversa Data una matrice quadrata A tale che $det(A) \neq 0$, dicesi *matrice inversa* di A la matrice $B = A^{-1}$, che rappresenta l'operatore inverso di A ovvero tale che per ogni x

$$y = Ax, \quad \Rightarrow \quad x = By.$$

La matrice inversa ha la proprietà che

$$AB = BA = I$$

dove I è la matrice identica. Vale la seguente formula per la determinazione dell'elemento B_{ij} di $B = A^{-1}$ (si faccia attenzione all'inversione degli indici delle sottomatrici \hat{A})

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{det(\hat{A}_{ji})}{detA}.$$

L'inversa del prodotto è il prodotto delle inverse in ordine contrario

$$(A B C \dots)^{-1} = (\dots C^{-1} B^{-1} A^{-1}).$$

Matrici partizionate In molte occasioni è necessario considerare matrici di matrici ovvero matrici i cui elementi sono a loro volta matrici o vettori. Per esempio una matrice A è pensabile come un vettore riga di vettori colonna

$$A = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_m]$$

oppure come un vettore colonna di vettori riga

$$B = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix}.$$

In generale una matrice può essere del tipo

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

dove A_{ij} sono sottomatrici. È di particolare interesse la regola del prodotto: date due matrici partizionate

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_{p1} & B_{p2} & \dots & B_{pm} \end{bmatrix}$$

e assunto che il numero di righe di ogni sottomatrice A_{kj} corrisponda al numero di colonne della sottomatrice B_{ik} allora la matrice prodotto

$$C = BA = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \dots & C_{pn} \end{bmatrix}$$

è partizionata e risulta

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik} A_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nella rappresentazione dello spazio \mathfrak{R}^n noi facciamo implicitamente riferimento alla base canonica. Infatti detto

$$e_k = [\quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \underbrace{1}_{\text{posizione } k\text{-ma}} \quad 0 \dots 0]^T$$

cioè il vettore avente tutti gli elementi nulli tranne il k -mo che vale 1, possiamo dire che

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Supponiamo ora di voler riferire il vettore x ad una nuova base t_1, t_2, \dots, t_n . Formata la matrice $T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]$ abbiamo che

$$x = \sum_{j=1}^n t_j \hat{x}_j = [\ t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n \] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = T \hat{x},$$

dove \hat{x}_j sono le componenti rispetto alla nuova base. Tali componenti raccolte nel vettore \hat{x} sono calcolabili secondo la regola

$$x = T\hat{x} \Rightarrow \hat{x} = T^{-1}x.$$

Data una applicazione lineare $y = Ax$ i cambiamenti di base $x = T\hat{x}$ e $y = S\hat{y}$ portano alla trasformazione

$$\hat{y} = S^{-1}AT\hat{x}$$

Se l'applicazione è da uno spazio in se stesso per cui la trasformazione (rappresentata da una matrice quadrata A) è comune ($x = T\hat{x}$ e $y = T\hat{y}$) abbiamo che la applicazione lineare si trasforma come segue

$$\hat{y} = T^{-1}AT\hat{x} = \hat{A}\hat{x}.$$

In questo caso la trasformazione è detta *trasformazione per similitudine*. Data una potenza di \hat{A}^k di \hat{A} , con k intero positivo, abbiamo che

$$\hat{A}^k = \underbrace{T^{-1}AT \ T^{-1}AT \ \dots \ T^{-1}AT}_{k \text{ volte}} = T^{-1}A^kT.$$

Se A è invertibile (e allora anche \hat{A} lo è), la proprietà vale anche per k negativo.

6.1.3 Autovalori e autovettori

Definizione Autovettore e autovalori Data una matrice quadrata A se esistono un vettore $x \neq 0$ e uno scalare λ complesso tali che

$$Ax = \lambda x,$$

x viene detto *autovettore* della matrice A , mentre λ viene detto *autovalore*.

L'equazione precedente può essere scritta nella forma

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Perché questa equazione abbia soluzione non banale è necessario che la matrice $(A - \lambda I)$ non abbia rango pieno ovvero sia singolare il che è equivalente alla condizione

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Tale funzione di λ è un polinomio

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

detto *polinomio caratteristico* di A . Tale polinomio è monico, ovvero il coefficiente di grado massimo è pari a 1. Gli autovalori sono dunque le radici (eventualmente complesse) di tale polinomio.

L'autovettore $x \neq 0$ che soddisfa la relazione è anche chiamato *autovettore destro*. Un vettore $z \neq 0$ tale che

$$z^T(A - \lambda I) = 0$$

è detto *autovettore sinistro*. Se trasponiamo la relazione abbiamo che

$$(A^T - \lambda I)z = 0$$

ovvero un autovettore sinistro è un autovettore destro della trasposta (gli autovalori della trasposta sono i medesimi di A perché $\det(\lambda I - A) = \det((\lambda I - A)^T) = \det(\lambda I - A^T)$).

L'insieme degli autovalori di A ovvero l'insieme delle radici di $p(\lambda)$ è detto *spettro* di A e si indica con

$$\sigma(A) = \{\lambda \in C : p(\lambda) = 0\}.$$

Assumiamo che la matrice A ammetta n autovalori distinti, ovvero che le radici di $p(\lambda)$ siano distinte

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

In questo caso si può provare che gli autovettori corrispondenti t_j sono linearmente indipendenti. Chiamiamo T la matrice le cui colonne sono questi vettori

$$T = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix}.$$

Allora vale la seguente relazione

$$A \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Se poniamo $S = T^{-1}$ allora valgono tutte le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} AT &= T\Lambda \\ SA &= \Lambda S \\ A &= T\Lambda S \\ \Lambda &= SAT. \end{aligned}$$

Si noti che partizionando S per righe

$$S = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix}$$

la relazione $SA = \Lambda S$ ci dice che le righe di S sono autovettori sinistri.

Nel caso in cui la matrice A non sia diagonalizzabile il problema risulta molto più complicato. Si può dimostrare che esiste una matrice $T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tale che $A = TJT^{-1}$, è diagonale a blocchi della forma

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_r),$$

Dove il k -esimo blocco J_k , di dimensione $\mu_k \times \mu_k$, è della forma

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}.$$

Una matrice J della forma indicata si dice in *forma di Jordan*.

È possibile ottenere una decomposizione di A del tipo

$$A = [T_1 T_2 \dots T_r] \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_r \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

dove $T_k \in \mathfrak{R}^{n \times \mu_k}$ e $S_k^T \in \mathfrak{R}^{\mu_k \times n}$. La forma di Jordan è unica a meno di permutazioni sui blocchi. Il numero di blocchi e le loro dimensioni sono caratteristici della matrice.

Per ogni autovalore λ multiplo si possono definire tre parametri fondamentali.

Molteplicità algebrica : è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico.

Molteplicità geometrica : è il numero di blocchi di λ come radice del polinomio caratteristico.

Grado : è la dimensione del blocco più grande associato a λ .

In grado di un autovalore è di particolare importanza. Esiste un modo molto semplice per calcolarlo *senza passare per la forma di Jordan*.

Calcolo del grado di $\lambda \in \sigma(A)$

per calcolare il grado definiamo i seguenti numeri:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{rank}(\lambda I - A)^1 \\ \rho_2 &= \text{rank}(\lambda I - A)^2 \\ &\vdots \\ \rho_g &= \text{rank}(\lambda I - A)^g \end{aligned}$$

Si dimostra che $\rho_i \geq \rho_{i+1}$. Si prosegue nel calcolo finchè non si verifica l'uguaglianza:

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_g = \rho_{g+1}$$

il coefficiente più piccolo per cui vale l'uguaglianza è il grado g di λ (formalmente $g = \min_i : \rho_i = \rho_{i+1}$).

Vale la seguente proprietà che riguarda l'invarianza degli autovalori.

Proprietà Una trasformazione di similitudine conserva il polinomio caratteristico e dunque gli autovalori. Infatti se $\hat{A} = T^{-1}AT$

$$\begin{aligned} \det(sI - \hat{A}) &= \det(sT^{-1}T - T^{-1}AT) = \det[T^{-1}(sI - A)T] = \\ &= \det(T^{-1})\det(sI - A)\det(T) = \det(sI - A). \end{aligned}$$

Gli autovettori si trasformano come ogni altro vettore.

6.1.4 Polinomi e serie di potenze

Come noto un polinomio nella variabile complessa s è una funzione del tipo

$$p(s) = p_0 + p_1s + p_2s^2 + \dots + p_r s^r.$$

Dicesi *serie di potenze* un polinomio di grado "infinito"

$$f(s) = f_0 + f_1s + f_2s^2 + \dots + f_h s^h + \dots = \sum_{h=0}^{\infty} f_h s^h.$$

Una funzione di questo tipo è definita in un certo dominio di convergenza di $f(s)$ del tipo

$$D = \{s : |s| < \rho\}$$

dove ρ , detto *raggio di convergenza*, dipende dai coefficienti $\{f_h\}$. Le funzioni esprimibili tramite serie di potenze sono dette *analitiche* ed hanno proprietà notevoli, che tralasciamo per brevità. Vale il seguente principio.

Principio di identità delle serie di potenze Sia l una curva continua (arbitrariamente piccola) avente un estremo nell'origine e contenente punti diversi da 0. Date due serie di potenze $f(s) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h s^h$ e $g(s) = \sum_{h=0}^{\infty} g_h s^h$ abbiamo che $f(s) = g(s)$ per ogni punto di l se e solo se $g_h = f_h$ per ogni $h \geq 0$.

Tramite serie di potenze è possibile definire funzioni di matrice. Sia $f(s)$ una funzione analitica e M una matrice. Si assuma che l'insieme degli autovalori di M sia contenuto nel dominio di convergenza di f^1 . Allora si può definire la funzione di matrice corrispondente a f

$$f(M) \doteq \sum_{h=0}^{\infty} f_h M^h.$$

¹questa ipotesi si può rimuovere grazie alla tecnica del prolungamento analitico

Per semplicità consideriamo il caso di M diagonalizzabile per cui

$$M^h = T\Sigma T^{-1},$$

con $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ diagonale. Allora

$$f(M) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h T\Sigma^h T^{-1} = T \left[\sum_{h=0}^{\infty} f_h \Sigma^h \right] T^{-1}$$

dove

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} f_h \Sigma^h \right] = \text{diag} \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} f_h \sigma_1^h, \sum_{h=0}^{\infty} f_h \sigma_2^h, \dots, \sum_{h=0}^{\infty} f_h \sigma_n^h \right\} = \text{diag}\{f(\sigma_1), f(\sigma_2), \dots, f(\sigma_n)\}.$$

Un caso particolare di serie di potenze è quello dei polinomi. Dato un polinomio $p(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_r s^r$ possiamo definire il polinomio di matrice

$$P(M) = p_0 I + p_1 M + p_2 M^2 + \dots + p_r M^r.$$

Vale la seguente proprietà notevole.

Identità di Cailey-Hamilton Sia A matrice quadrata e sia

$$\det(sI - A) = p(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n.$$

Allora il corrispondente polinomio di matrice calcolato in A è la matrice nulla ossia

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + A^n = 0.$$

La dimostrazione di questo fatto è semplice nel caso in cui A sia diagonalizzabile, ovvero $A = T\Lambda T^{-1}$ perché, come abbiamo visto,

$$P(A) = T \text{diag}\{p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)\} T^{-1} = 0$$

in quanto $p(\lambda_i) = 0$.

L'identità di Cailey-Hamilton ha come conseguenza il seguente fatto:

Dipendenza delle le potenze di A Ogni potenza di A è combinazione lineare delle prime n potenze

$$I, A, A^2, \dots, A^{n-1}.$$

Per verificarlo è sufficiente scrivere l'identità di Cailey-Hamilton come

$$A^n = -a_{n-1} A^{n-1} - \dots - a_2 A^2 - a_1 A - a_0 I.$$

Questo significa che A^n è combinazione lineare delle prime n potenze. Procedendo per induzione, supponiamo che questo sia vero per $k \geq n$

$$A^k = -\alpha_{n-1} A^{n-1} - \dots - \alpha_2 A^2 - \alpha_1 A - \alpha_0 I,$$

moltiplichiamo per A ottenendo

$$\begin{aligned}
 A^{k+1} &= -\alpha_{n-1}A^n - \dots - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A = \\
 &= -\alpha_{n-1}[-\alpha_{n-1}A^{n-1} - \dots - \alpha_2A^2 - \alpha_1A - \alpha_0I] \\
 &\quad - \dots - \alpha_2A^3 - \alpha_1A^2 - \alpha_0A = \\
 &= -\alpha_{n-1}^*A^{n-1} - \dots - \alpha_2^*A^2 - \alpha_1^*A^1 - \alpha_0^*I
 \end{aligned}$$

(dove gli α_j^* sono calcolabili facilmente) quindi è vero per $k + 1$.

6.2 La risposta impulsiva

Un concetto di facile intuizione ma di non facile descrizione matematica è la risposta all'impulso unitario. Intuitivamente, un impulso è un fenomeno di altissima intensità e brevissima durata. Per rappresentarlo possiamo fare le seguenti considerazioni. Prendiamo la funzione $\delta_\epsilon(t)$ come segue

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{se } -\frac{\epsilon}{2} \leq t \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{se } t > \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

Per ϵ che si riduce, abbiamo che il supporto di questa funzione (l'intervallo dove è non-nulla), precisamente $[-\epsilon/2, \epsilon/2]$, diventa sempre più stretto mentre il valore della funzione in tale intervallo, $1/\epsilon$, diventa sempre più grande. Da notarsi che l'integrale di questa funzione sull'asse reale è sempre pari a 1. Sia t_0 un punto interno dell'intervallo $[a, b]$ e sia ϵ un valore tale per cui la funzione $\delta_\epsilon(t)$ assume valori non-nulli solo all'interno di $[a, b]$ ($t_0 - \epsilon/2$ e $t_0 + \epsilon/2$ devono entrambi appartenere ad $[a, b]$).

Intuitivamente, la “funzione impulso” in t_0 , $\delta(t - t_0)$ è, il “limite” per ϵ tendente a 0 della funzione $\delta_\epsilon(t - t_0)$. Questo oggetto non è in realtà una funzione ma una distribuzione, e una trattazione formale viene omessa per semplicità. Quella che segue è una spiegazione intuitiva. Consideriamo il seguente integrale

$$\int_a^b f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt,$$

dove f è una qualunque funzione continua. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt &= \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt = \\
 &= \int_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}^{t_0 + \frac{\epsilon}{2}} f(t) \frac{1}{\epsilon} dt = \frac{1}{\epsilon} f(\tau) \epsilon = f(\tau)
 \end{aligned}$$

dove τ è un punto interno a $[t_0 - \frac{\epsilon}{2}, t_0 + \frac{\epsilon}{2}]$ che esiste per il teorema del valor medio. Essendo f continua abbiamo che per ϵ tendente a zero

$$\int_a^b f(t) \delta_\epsilon(t - t_0) dt \rightarrow f(t_0).$$

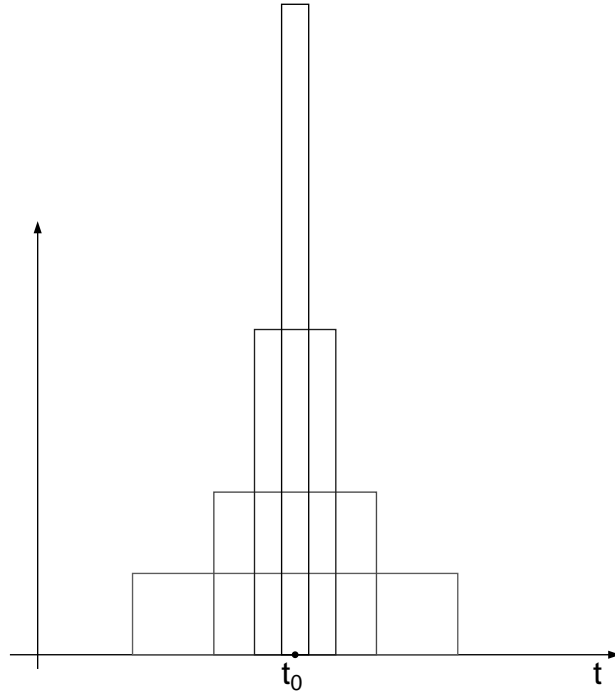


Figura 6.1: L'impulso può essere pensato come il limite di una successione di funzioni.

Quindi la funzione limite $\delta(t-t_0)$ viene definita come quella “funzione” avente la proprietà che per ogni funzione continua f definita sull'intervallo $[a, b]$ avente t_0 quale punto interno si ha che

$$\int_a^b f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0). \quad (6.2)$$

Consideriamo ora il caso di un sistema lineare ad un ingresso ed una uscita la cui risposta forzata è data dalla convoluzione

$$y(t) = \int_0^t W(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma.$$

Se prendiamo come ingresso la funzione impulso $\delta(\sigma-t_0)$ per $\sigma \geq 0$ abbiamo che

$$y_{imp}(t) = \int_0^t W(t-\sigma)\delta(\sigma-t_0)d\sigma = W(t-t_0),$$

per $t > t_0$ (mentre $y_{imp}(t) = 0$ per $t < t_0$). Si noti infine che per considerare l'impulso nell'istante 0 dobbiamo considerare il prodotto di convoluzione

$$y(t) = \int_{0^-}^t W(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma.$$

6.3 Trasformate di Laplace

La trasformata di Laplace è uno strumento di grande utilità per lo studio dei sistemi lineari e invarianti. Se ne riportano qui le proprietà fondamentali.

6.3.1 Definizione e proprietà fondamentali

Data una funzione $f(t)$ a supporto positivo (cioè definita per ogni t e nulla per $t < 0$) dicesi *trasformata di Laplace* la funzione (se esiste)

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (6.3)$$

dove s è una variabile complessa. Se tale funzione esiste la funzione f è detta Laplace-trasformabile. Con un certo abuso di notazione (ma con gran comodità di rappresentazione) si usa rappresentare la funzione e la sua trasformata con la medesima lettera

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

L'espressione (6.3) è definita in un opportuno dominio di s , precisamente in un dominio del tipo

$$Dom_f = \{s : \Re(s) > c\}.$$

Il più piccolo valore c_f di c per cui la convergenza è garantita è detta ascissa di convergenza (relativamente a f).

La trasformata di Laplace gode di una serie di proprietà che ora illustriamo. Siano f e g funzioni continue e derivabili per $t > 0$. Sia $Dom = Dom_f \cap Dom_g$ il dominio comune di convergenza. Allora abbiamo le seguenti proprietà fondamentali. Siano $f(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $g(s) = \mathcal{L}[g(t)]$

Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha f(s) + \beta g(s).$$

Trasformata della derivata

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sf(s) - f(0).$$

Teorema del limite finale Ammesso che i limiti scritti di seguito *esistano e siano entrambi finiti* abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s).$$

Teorema del limite iniziale Ammesso che i limiti scritti di seguito *esistano e siano entrambi finiti* abbiamo che

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s).$$

Teorema della convoluzione

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t g(t-\sigma) f(\sigma) d\sigma \right] = \mathcal{L} \left[\int_0^t g(\sigma) f(t-\sigma) d\sigma \right] = f(s)g(s).$$

Teorema della traslazione

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} f(s).$$

Teorema della moltiplicazione per t

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} f(s).$$

6.3.2 Trasformate principali

In questa sottosezione ci occupiamo di calcolare le trasformate delle funzioni del tipo $t^k e^{\xi t} \cos(\omega t)$ e $t^k e^{\xi t} \sin(\omega t)$ e tutti i casi particolari ($\xi = 0$, $\omega = 0$, $k = 0$). Cominciamo appunto dal caso più semplice

$$\mathcal{L} [e^{\lambda t}] = \frac{1}{s - \lambda}.$$

La proprietà sopra vale nel caso di λ reale o complesso come è facilissimo verificare. Consideriamo ora il problema della determinazione della trasformata $\mathcal{L}[\cos(\omega t)]$. Il modo più semplice per il calcolo è considerare la funzione $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$. Calcolandome la trasformata, parte reale e immaginaria ci forniranno, per linearità, le trasformate delle funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [e^{j\omega t}] &= \frac{1}{s - j\omega} = \frac{s + j\omega}{s + j\omega} \frac{1}{s - j\omega} = \\ &= \frac{s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \underbrace{\frac{s}{s^2 + \omega^2}}_{\mathcal{L}[\cos(\omega t)]} + j \underbrace{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}_{\mathcal{L}[\sin(\omega t)]} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Usando lo stesso “trucco” e ponendo $\lambda = \xi + j\omega$, trasformando la relazione

$$e^{\lambda t} = e^{(\xi + j\omega)t} = e^{\xi t} (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))$$

otteniamo le trasformate

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{\xi t} \cos(\omega t)] &= \frac{s - \xi}{(s - \xi)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}[e^{\xi t} \sin(\omega t)] &= \frac{\omega}{(s - \xi)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la trasformata della funzione $te^{\lambda t}$. Questa si ottiene considerando il teorema della moltiplicazione per t :

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t}] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s - \lambda} = \frac{1}{(s - \lambda)^2}.$$

Dal fatto banale che $t^k e^{\lambda t} = t(t^{k-1} e^{\lambda t})$ è possibile dimostrare ricorsivamente che

$$\mathcal{L}[t^k e^{\lambda t}] = \frac{k!}{(s - \lambda)^{k+1}}.$$

Una trasformata importante è quella dell'impulso $\delta(t - \tau)$. Abbiamo che

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)] = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-st} dt = e^{-s\tau}$$

in particolare per $\tau = 0$ questa relazione ci dice che la funzione impulso nell'origine ha come trasformata

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

La trasformata dell'ingresso a gradino in τ

$$gr(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq \tau \\ 1 & \text{per } t > \tau \end{cases}$$

è ottenibile con una sostituzione di variabile $\sigma = t - \tau$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[gr(t - \tau)] &= \int_{t=0}^{t=\infty} gr(t - \tau) e^{-st} dt = \int_{\sigma=-\tau}^{\sigma=\infty} gr(\sigma) e^{-s(\sigma+\tau)} d\sigma = \\ &= e^{-s\tau} \int_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} e^{-s\sigma} d\sigma = \frac{e^{-s\tau}}{s}. \end{aligned}$$

In particolare, la trasformata del gradino in 0 è

$$\mathcal{L}[gr(t)] = \frac{1}{s}.$$

6.3.3 Antitrasformate di funzioni razionali proprie

Abbiamo visto nella sezione precedente alcune delle trasformate principali. In questa sezione ci occupiamo del problema inverso, cioè dell'antitrasformazione. In particolare ci occupiamo di antitrasformate di funzioni razionali proprie, del tipo

$$f(s) = \frac{n_0 + n_1 s + n_2 s^2 + \dots + n_\nu s^\nu}{d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + s^\nu}.$$

Si noti che abbiamo posto il coefficiente di s^ν al denominatore $d_\nu = 1$ il che non è restrittivo perché, qualora sia $d_\nu \neq 1$, è sempre possibile ricondursi a

questa situazione dividendo numeratore e denominatore per d_ν . Una funzione del tipo $f(s)$ può essere sempre trasformata nella somma di una costante e di una funzione strettamente propria²

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{n_0 + n_1s + n_2s^2 + \dots + n_\nu s^\nu}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + s^\nu} = \frac{n_\nu(d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + s^\nu)}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + s^\nu} + \\ &+ \frac{(n_0 - n_\nu d_0) + (n_1 - n_\nu d_1)s + \dots + (n_{\nu-1} - n_\nu d_{\nu-1})s^{\nu-1}}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + s^\nu} \\ &= n_\nu + \frac{\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1s + \tilde{n}_2s^2 + \dots + \tilde{n}_{\nu-1}s^{\nu-1}}{d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + s^\nu} = n_\nu + \tilde{f}(s) \end{aligned}$$

dove $\tilde{f}(s)$ è strettamente propria. Fatta questa operazione, abbiamo che

$$\mathcal{L}^{-1}[f(s)] = n_\nu \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}[\tilde{f}(s)],$$

quindi il problema è quello di determinare l'antitrasformata della funzione razionale strettamente propria \tilde{f} .

Allora consideriamo una funzione strettamente propria $f(s)$. Una funzione strettamente propria avente poli (radici del denominatore) distinti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ può essere sempre scritta nella forma

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{r_i}{s - \lambda_i} \quad (6.4)$$

dove i coefficienti r_i sono detti *residui*. I residui sono calcolabili come limite

$$r_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) f(s),$$

come è facile dedurre dall'espressione (6.4). Se fattorizziamo il denominatore scrivendo f come

$$f(s) = \frac{n(s)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_\nu)}$$

vediamo che la formula si riduce al calcolo

$$r_i = \left. \frac{n(s)}{\prod_{j \neq i} (s - \lambda_j)} \right|_{s=\lambda_i}.$$

In modo alternativo possiamo procedere con un sistema di equazioni lineari. Consideriamo l'espressione (6.4) e portiamo gli addendi a denominatore comune, ottenendo

$$f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} r_i \prod_{j \neq i} (s - \lambda_j)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_\nu)} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} r_i \Psi_i(s)}{d(s)}$$

²dicesi strettamente propria una funzione razionale in cui il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore

questa espressione ci dice che deve valere l'identità

$$n(s) = \sum_{i=1}^{\nu} r_i \Psi_i(s),$$

dove entrambi i membri sono polinomi di grado ν in s . Applicando il principio di identità dei polinomi abbiamo che i coefficienti r_i sono determinabili tramite un sistema lineare (si tratta di uguagliare i coefficienti dei termini grado uguale).

Esempio Consideriamo la funzione

$$f(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2} + \frac{r_3}{s+3}$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} r_1 &= \left. \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} \right|_{s=-1} = \frac{3}{2} \\ r_2 &= \left. \frac{s+4}{(s+1)(s+3)} \right|_{s=-2} = -2 \\ r_3 &= \left. \frac{s+4}{(s+1)(s+2)} \right|_{s=-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Se vogliamo procedere con il metodo del sistema lineare abbiamo che

$$\begin{aligned} (s+4) &= r_1(s+2)(s+3) + r_2(s+1)(s+3) + r_3(s+1)(s+2) \\ &= r_1(s^2 + 5s + 6) + r_2(s^2 + 4s + 3) + r_3(s^2 + 3s + 2) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3)s^2 + (5r_1 + 4r_2 + 3r_3)s + 6r_1 + 3r_2 + 2r_3 \end{aligned}$$

da cui il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 &= 0 \\ 5r_1 + 4r_2 + 3r_3 &= 1 \\ 6r_1 + 3r_2 + 2r_3 &= 4 \end{aligned}$$

che fornisce gli stessi valori per r_1, r_2, r_3 .

Questo modo di procedere può creare dei problemi se alcuni poli λ_i sono complessi. Se così è si può decidere di lavorare in termini reali. Fattorizziamo il denominatore come segue

$$\begin{aligned} d(s) &= \prod_{i=1}^m (s - \lambda_i) \prod_{i=1}^q (s^2 - 2\xi_i s + \xi_i^2 + \omega_i^2) \\ &= \prod_{i=1}^m (s - \lambda_i) \prod_{i=1}^q ((s - \xi_i)^2 + \omega_i^2) \end{aligned}$$

dove i fattori $(s - \lambda_i)$ sono associati alle m radici reali mentre i fattori $((s - \xi_i)^2 + \omega_i^2)$ sono associati alle q coppie di radici complesse coniugate $\xi_i + j\omega_i$ (chiaramente $m + 2q = \nu$). Allora abbiamo che

$$f(s) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i}{(s - \lambda_i)} + \sum_{i=1}^q \frac{a_i s + b_i}{(s - \xi_i)^2 + \omega_i^2}.$$

I coefficienti r_i sono determinabili con la formula del limite. Per calcolare tutti i coefficienti r_i , a_i e b_i possiamo procedere scrivendo l'espressione con il denominatore comune e calcolando tramite un sistema lineare i coefficienti.

Esempio Consideriamo la funzione razionale

$$f(s) = \frac{2s^3 + 1}{(s + 1)(s + 2)((s + 1)^2 + 4)}.$$

Tale funzione può essere scritta come

$$f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{r_1}{s + 1} + \frac{r_2}{s + 2} + \frac{a_1 s + b_1}{(s^2 + 2s + 5)}.$$

Allora, dopo aver posto l'espressione sotto denominatore comune, uguagliando i numeratori abbiamo

$$2s^3 + 1 = r_1(s + 2)(s^2 + 2s + 5) + r_2(s + 1)(s^2 + 2s + 5) + (a_1 s + b_1)(s + 1)(s + 2)$$

Tramite il principio di identità dei polinomi possiamo ricavare i coefficienti r_1 , r_2 , a_1 e b_1 . Uguagliando i coefficienti dei termini di ciascun grado si ottiene il sistema lineare

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + a_1 &= 2 \\ 4r_1 + 3r_2 + 3a_1 + b_1 &= 0 \\ 9r_1 + 7r_2 + 2a_1 + 3b_1 &= 0 \\ 10r_1 + 5r_2 + 2b_1 &= 1 \end{aligned}$$

risolvendo il quale si ha

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{4} \\ r_2 &= 3 \\ a_1 &= -\frac{3}{4} \\ b_1 &= -\frac{23}{4}. \end{aligned}$$

Consideriamo ora brevemente il caso di funzioni razionali con poli multipli. La forma più generale di decomposizione è

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{g_i} \frac{r_{ij}}{(s - \lambda_i)^j}$$

dove g_i è la molteplicità del polo λ_i . I valori r_{ij} sono ottenibili tramite sistema, come possiamo vedere nel seguente esempio.

Esempio

$$f(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s + 1)^2(s + 2)^3} \quad (6.5)$$

$$= \frac{r_{11}}{s + 1} + \frac{r_{12}}{(s + 1)^2} + \frac{r_{21}}{s + 2} + \frac{r_{22}}{(s + 2)^2} + \frac{r_{23}}{(s + 2)^3} \quad (6.6)$$

Con la solita tecnica del denominatore comune, uguagliando i denominatori otteniamo che

$$\begin{aligned} s^2 + s + 1 &= r_{11}(s + 1)(s + 2)^3 + r_{12}(s + 2)^3 + r_{21}(s + 1)^2(s + 2)^2 + \\ &+ r_{22}(s + 1)^2(s + 2) + r_{23}(s + 1)^2 \end{aligned}$$

da cui è possibile ricavare i coefficienti r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} e r_{23} . Uguagliando i coefficienti dei termini di ciascun grado si ottiene il sistema lineare

$$\begin{aligned} r_{11} + r_{21} &= 0 \\ 7r_{11} + r_{12} + 6r_{21} + r_{22} &= 0 \\ 18r_{11} + 6r_{12} + 13r_{21} + 4r_{22} + r_{23} &= 1 \\ 20r_{11} + 12r_{12} + 12r_{21} + 5r_{22} + 2r_{23} &= 1 \\ 8r_{11} + 8r_{12} + 4r_{21} + 2r_{22} + r_{23} &= 1 \end{aligned}$$

risolvendo il quale si ha

$$\begin{aligned} r_{11} &= -4 \\ r_{12} &= 1 \\ r_{21} &= 4 \\ r_{22} &= 3 \\ r_{23} &= 3. \end{aligned}$$

Una volta calcolata la decomposizione, il problema dell'antitrasformazione è facilmente solubile. Infatti, essendo la trasformata e, dunque, l'antitrasformata operatori lineari, basta antitrasformare termine a termine. Abbiamo che per gli addendi il cui denominatore è di primo grado

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r}{s - \lambda} \right] = r e^{\lambda t},$$

mentre per quelli di secondo grado scriviamo

$$\frac{as + b}{(s - \xi)^2 + \omega^2} = \frac{a(s - \xi)}{(s - \xi)^2 + \omega^2} + \frac{(b + a\xi)}{(s - \xi)^2 + \omega^2}$$

per cui

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{as + b}{(s - \xi)^2 + \omega^2} \right] = a e^{\xi t} \cos(\omega t) + \frac{b + a\xi}{\omega} e^{\xi t} \sin(\omega t).$$

Nel caso di autovalori multipli abbiamo che il generico termine di grado $k+1$ è trasformabile come segue

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r}{(s - \lambda)^{k+1}} \right] = \frac{r}{k!} t^k e^{\lambda t}$$

dove λ è reale o complesso.

6.4 Trasformata Zeta

La trasformata Zeta è lo strumento analogo alla trasformata di Laplace per l'analisi dei sistemi a tempo discreto. Vista la stretta analogia se ne darà solo un breve cenno. Data la successione o funzione a tempo discreto $f(k)$, definita per $k \geq 0$, la trasformata di f è la funzione di variabile complessa z definita come segue

$$Z[f] \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \frac{1}{z^k} = f(z)$$

Tale funzione ha come dominio di convergenza un insieme del tipo

$$\mathcal{D} = \{z : |z| > \rho_f\}$$

(il complemento del disco di raggio $\rho_f \geq 0$) dove il raggio ρ_f dipende dalla funzione considerata.

La trasformata Zeta ha proprietà del tutto analoghe alla trasformata di Laplace. Ricordiamo solamente le principali.

Linearità : $Z[\alpha f + \beta g] = \alpha Z[f] + \beta Z[g]$.

Trasformata di f anticipata : $Z[f(k+1)] = zZ[f] - zf(0)$.

Trasformata della convoluzione :

$$Z\left[\sum_{h=0}^{k-1} f(k-h)g(h)\right] = Z[f]Z[g].$$

Le altre proprietà quali il limite finale iniziale vengono omesse. L'utilità della trasformata Zeta nello studio dei sistemi a tempo discreto è del tutto paragonabile a quella della trasformata di Laplace nello studio dei sistemi a tempo continuo.

Capitolo 7

Bibliografia

1. P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni, *Fondamenti di Controlli Automatici*, McGraw–Hill, Milano, 2004.
2. A. Ferrante, A. Lepschy, U. Viaro, *Introduzione ai Controlli Automatici*, UTET, Padova, 2000.
3. *The Control Handbook*, Edited by W. Levine, CRC Press, 1996.
4. G. Marro, *Controlli Automatici*, Zanichelli, Bologna, 2004.
5. B. C. Kuo, *Automatic Control Systems*, Prentice Hall, 1986.