Modulo di Controlli Automatici I, Eserciziario

Autore: ing. Felice Andrea Pellegrino *

11 novembre 2005

*email: fapellegrino@univ.trieste.it

1 Introduzione

Il presente Eserciziario è stato realizzato come supporto al corso di Controllo Automatici I tenuto dal prof. Stefano Miani nell'ambito del Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Udine, sede di Pordenone. Gli argomenti trattati seguono fedelmente il programma di tale insegnamento. Ringrazio di cuore chi vorrà segnalarmi eventuali errori e/o imprecisioni.

F.A.P.

2 Algebra lineare

2.1 Esercizio

Si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Soluzione

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda) = det(\lambda I - A)$:

$$P(\lambda) = det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Imponendo $P(\lambda) = 0$ si trovano le due soluzioni $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$ che sono gli autovalori cercati. Gli autovettori si determinano risolvendo i sistemi $(\lambda_1 I - A)x = 0$ e $(\lambda_2 I - A)x = 0$. Per λ_1 si ha:

$$\begin{bmatrix} 1-2 & -2 \\ -1 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui, posto $x_2 = \alpha$ si ricava che sono autovettori associati all'autovalore $\lambda_1 = 1$ tutti i vettori della forma

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$$

Similmente si trova che gli autovettori associati a λ_2 sono del tipo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$$

2.2 Esercizio

Dire per quali $a \geq 0$ gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ hanno entrambi parte reale strettamente negativa.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) - a = \lambda^2 - 5\lambda + 6 - a$, che ha per radici:

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}.$$

È facile rendersi conto che comunque si prenda a, almeno una delle due radici ha parte reale positiva. Allo stesso risultato si poteva pervenire osservando che indipendentemente da a la traccia della matrice (la somma degli elementi della diagonale principale) è positiva: $Tr(A) = 2 + 3 = 5$. Come è noto, la traccia di una matrice è pari alla somma degli autovalori: se la traccia è positiva, almeno uno degli autovalori deve esserlo.

2.3 Esercizio

Dire per quali a gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, hanno parte reale non positiva.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 3) - a = \lambda^2 + 2\lambda - (a + 3)$, che ha per radici:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16 + 4a}}{2}.$$

Per $a < -4$ il discriminante $\Delta = 16 + 4a$ è negativo e pertanto le due radici sono complesse (coniugate)

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{-\Delta}}{2},$$

ed hanno parte reale pari a -1. Per $-4 \leq a < -3$ si ha $\sqrt{\Delta} < 2$ e quindi $Re(\lambda_1), Re(\lambda_1) < 0$. Se $a = -3$ le radici sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$, mentre se $a > -3$ le radici hanno segno opposto. Riassumendo, perché gli autovalori di A abbiano parte reale non positiva, deve essere $a \leq -3$. Allo stesso risultato si poteva pervenire molto semplicemente sfruttando la regola di Cartesio sui segni delle radici di un polinomio di secondo grado.

2.4 Esercizio

Dire per quali $a \geq 0$ gli autovalori della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -a \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ hanno parte immaginaria non nulla.

Soluzione

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3) + a = \lambda^2 + \lambda - 6 + a$, che ha per radici:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

dove $\Delta = 25 - 4a$. Affinché le radici del polinomio caratteristico abbiano parte immaginaria non nulla deve essere allora $\Delta < 0$, ossia $a > 25/4$.

2.5 Esercizio

Dire se le seguenti matrici sono invertibili ed in caso affermativo calcolarne l'inversa.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Soluzione

1. Applicando la regola di Sarrus per il calcolo del determinante delle matrici 3×3 si trova che $det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$. La matrice pertanto non è invertibile.

2. Risulta $det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Quindi la matrice è invertibile. L'inversa può essere calcolata direttamente attraverso la $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}[\alpha_{ij}]^T$ dove α_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento di indici i, j ossia il determinante della sottomatrice ottenuta sopprimendo

la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= (-1)^2 det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 1, \\
\alpha_{12} &= (-1)^3 det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= -1, \\
\alpha_{13} &= (-1)^4 det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= 1, \\
\alpha_{21} &= (-1)^3 det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0, \\
\alpha_{22} &= (-1)^4 det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= 2, \\
\alpha_{23} &= (-1)^5 det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= 0, \\
\alpha_{31} &= (-1)^4 det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= -1, \\
\alpha_{32} &= (-1)^5 det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= -1, \\
\alpha_{33} &= (-1)^6 det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= 1,
\end{aligned}$$

da cui $[\alpha_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Risulta quindi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

3. La matrice è triangolare superiore, dunque il determinante è pari al prodotto degli elementi della diagonale principale. Si ha:

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

e dunque la matrice è invertibile. Per il calcolo dell'inversa si può procedere applicando la $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}[\alpha_{ij}]^T$ come visto al punto precedente. Un metodo alternativo, valido per qualunque matrice invertibile, consiste nel giustapporre alla matrice A da invertire la matrice identica, ottenendo una matrice rettangolare della forma $[A \mid I]$ e, attraverso operazioni elementari sulle righe "spostare a sinistra la matrice identica, riconducendosi alla forma $[I \mid B]$. Si può provare che la B così ottenuta è l'inversa della A. Applicando questo metodo si ha:

$$[A \mid I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sommando alla prima riga la seconda, sottraendo dalla terza riga la quarta e dividendo la terza riga per due, si perviene alla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I \mid B].$$

Pertanto si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.6 Esercizio

Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Soluzione

Si ricorda che una matrice è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità *algebrica* di ciascun autovalore (la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico) è pari alla molteplicità *geometrica* dell'autovalore (che è la dimensione dell'autospazio ad esso relativo).

1. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$, gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$. Poiché gli autovalori sono distinti, gli autovettori sono linearmente indipendenti e a ciascuno di essi è associato un autospazio di dimensione 1. La matrice è quindi diagonalizzabile.

2. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)^2$, gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = -1$, e $\lambda_2 = -2$. L'autovalore λ_2 ha molteplicità algebrica pari a 2. La dimensione dell'autospazio ad esso relativo coincide con la dimensione del nucleo di $(\lambda_2 I - A)$, ossia
$$\mu(\lambda_2) = dim(ker(\lambda_2 I - A)).$$
Poiché
$$(\lambda_2 I - A)x = 0 \Longleftrightarrow x = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
l'autospazio associato a λ_2 ha dimensione 2 e quindi la molteplicità geometrica è pari alla molteplicità algebrica. Pertanto la matrice è diagonalizzabile.

3. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda+1)^3$, pertanto si ha l'unico autovalore $\lambda = -1$ con molteplicità algebrica pari a 3. L'autospazio associato a λ ha dimensione
$$\mu(\lambda) = dim(ker(\lambda I - A)) = dim(ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 2,$$

come è facile verificare. Essendovi un autovalore (che in questo caso è anche l'unico autovalore) la cui molteplicità geometrica differisce da quella algebrica, la matrice non è diagonalizzabile. Si potrà invece ricondurla alla forma di Jordan attraverso una trasformazione opportuna. Si verifichi per esercizio che la matrice di cambiamento di base $T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ è tale che la $J = T^{-1}AT$ è in forma di Jordan.

2.7 Esercizio

Data la matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare e^{At}.

Soluzione

Anzitutto conviene calcolare autovalori e autovettori per trovare la trasformazione che mette A in forma diagonale (o, se ciò non è possibile, in forma di Jordan). Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2)$. Pertanto gli autovalori sono $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -2$. Essendo gli autovalori distinti, la matrice è diagonalizzabile. L'autospazio associato a λ_1 è formato dalle soluzioni del sistema $(\lambda_1 I - A)x = 0$, ossia:

$$\begin{bmatrix} -3+4 & +1 \\ -2 & -3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Allo stesso modo si trova che le soluzioni del sistema $(\lambda_2 I - A)x = 0$ sono del tipo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Dunque una matrice di cambiamento di base le cui colonne sono autovettori è $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, la cui inversa è $T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. È facile verificare che $A = T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} T^{-1} = T\Lambda T^{-1}$.
Pertanto si ha:

$$\begin{aligned} e^{At} &= Te^{\Lambda t}T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-3t} & e^{-2t} \\ -e^{-3t} & -2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-3t} - e^{-2t} & e^{-3t} - e^{-2t} \\ -2e^{-3t} + 2e^{-2t} & -e^{-3t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.8 Esercizio

Calcolare e^{At} per le seguenti matrici.

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Soluzione

1. La matrice ha $\lambda = -2$ come unico autovalore ed è in forma di Jordan, risulta pertanto:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

2. Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -6 & 2 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda+2) det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda-2 \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+2),$$

le cui radici sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1+j$ e $\lambda_3 = 1-j$. Dunque un autovalore è reale e gli altri sono una coppia di complessi coniugati. Gli autovettori si trovano risolvendo i sistemi $(\lambda_i I - A) = 0$; in particolare per λ_1 si ha

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

da cui

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alla coppia di autovalori complessi coniugati corrisponde una coppia di autovettori complessi coniugati. Per λ_2 si ha il sistema

$$\begin{bmatrix} 3+j & 0 & 0 \\ 1 & 1+j & -1 \\ -6 & 2 & -1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0, \tag{1}$$

che va risolto nel piano complesso, ossia per $x_1, x_2, x_3 \in C$. La soluzione del sistema è lasciata per esercizio (suggerimento: le tre equazioni a coefficienti (e incognite) complessi del sistema (1) sono equivalenti a sei equazioni a coefficienti (e incognite) reali, tre per le parti reali e tre per le parti immaginarie). Si trova che gli autovettori associati a λ_2 e λ_3 hanno la forma:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ (\alpha+\beta)/2 \pm j(\alpha-\beta)/2 \\ \alpha \pm j\beta \end{bmatrix}, (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Pertanto una matrice di cambiamento di base le cui colonne sono autovettori è:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1-j & 1+j \end{bmatrix},$$

che ha per inversa:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2+j & 1/2-j/2 & j/2 \\ -1/2-j & 1/2+j/2 & -j/2 \end{bmatrix}.$$

Dunque, posto $\Lambda = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+j & 0 \\ 0 & 0 & 1-j \end{bmatrix}$, si avrà

$$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}.$$

il cui calcolo è lasciato per esercizio.

La T appena trovata è tale che $T^{-1}AT$ è diagonale. Quando, come in questo caso, vi sono autovalori complessi si preferisce tuttavia una forma diversa, in cui gli elementi di $T^{-1}AT$ siano reali. In particolare, invece di blocchi del tipo

$$\begin{bmatrix} \sigma + j\omega & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega \end{bmatrix},$$

si preferisce compaiano blocchi del tipo

$$\begin{bmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix},$$

il cui esponenziale è

$$e^{\sigma} \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}.$$

Per esercizio, si determini una matrice T tale che si abbia

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3 Sistemi lineari a tempo continuo, analisi nel tempo

3.1 Esercizio

Determinare gli stati e le uscite di equilibrio per il sistema dinamico

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = \bar{u} = 4$ nei tre casi:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}, D = 2;$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D = 2;$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, D = 2.$

Soluzione

All'equilibrio deve aversi $\dot{x} = 0$ dunque gli stati di equilibrio si trovano imponendo:

$$Ax + B\bar{u} = 0. \tag{2}$$

1. In questo caso A è invertibile (l'inversa è $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & 1/8 \end{bmatrix}$) per cui dalla (2) si ricava

   $$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} = -\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & 1/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

   Sostituendo $\bar{x}$ e $\bar{u}$ nella trasformazione d'uscita si ottiene l'uscita di equilibrio:

   $$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = 8.$$

2. In questo caso $det(A) = 0$ e dunque la matrice non è invertibile. Il sistema (2) corrisponde alle equazioni

   $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 &= \bar{u} \\ -2x_1 + 4x_2 &= -2\bar{u} \end{cases}$$

   che sono compatibili, essendo l'una multiplo dell'altra. Pertanto gli stati di equilibrio sono infiniti e sono del tipo

   $$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{x_1 - \bar{u}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{x_1 - 4}{2} \end{bmatrix},$$

   con x_1 qualsiasi. Sostituendo nella trasformazione di uscita si ricavano le uscite di equilibrio:

   $$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u} = 2x_1 + 4.$$

3. Si ha $det(A) = 0$ dunque la matrice non è invertibile. Il sistema (2) corrisponde alle equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = & \bar{u} \\ -2x_1 + 4x_2 & = & \bar{u} \end{cases}$$

che sono evidentemente incompatibili per $\bar{u} = 4$. Pertanto non vi sono stati di equilibrio e nemmeno uscite di equilibrio (la cosa è vera per ogni $\bar{u}$ costante diverso da zero).

3.2 Esercizio

Dato il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare:

1. il movimento libero dello stato in corrispondenza della condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$;
2. il movimento forzato per condizioni iniziali nulle e ingresso $u(t) = \bar{u} = 2,\ t \geq 0$.

Soluzione

È sufficiente applicare l'equazione di Lagrange:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{3}$$

1. Il movimento libero è il movimento in corrispondenza di ingresso nullo. Dunque la (3) diventa:

   $$x(t) = e^{At}x(0),$$

   dove si è posto $t_0 = 0$. Si tratta dunque di calcolare e^{At}. La matrice A è in forma triangolare: i suoi autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. Risolvendo i sistemi $(\lambda_1 I - A) = 0$ e $(\lambda_2 I - A) = 0$ si ricavano gli autovettori:

   $$u_1 = \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0.$$

   Una matrice di cambiamento di base che permette di diagonalizzare A è dunque:

   $$T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

   che ha per inversa

   $$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -1/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Posto $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ si ha allora:

   $$e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -1/5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ \frac{e^{2t}-e^{-3t}}{5} & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

   Pertanto:

   $$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ \frac{e^{2t}-e^{-3t}}{5} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \frac{e^{2t}-e^{-3t}}{5} - e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

2. In questo caso, essendo $x(0) = 0$ e $u(t) = \bar{u}$, l'equazione di Lagrange diventa:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\bar{u} d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau B\bar{u}.$$

Poiché

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau &= \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2(t-\tau)} & 0 \\ \frac{e^{2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}}{5} & e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{e^{2(t-\tau)}}{2} & 0 \\ -\frac{e^{2(t-\tau)}}{10} - \frac{e^{-3(t-\tau)}}{15} & \frac{e^{-3(t-\tau)}}{3} \end{bmatrix}_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & \frac{1-e^{-3t}}{3} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

il movimento forzato risulta:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} d\tau B\bar{u} = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & \frac{1-e^{-3t}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2 = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-e^{-3t}}{3} \end{bmatrix}.$$

Si noti che gli elementi contrassegnati con $*$ non sono stati calcolati in quanto ininfluenti sul risultato, data la particolare forma della B (il cui primo elemento è nullo).

3.3 Esercizio

È dato il sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

dove $A = \begin{bmatrix} -1 & -a \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Per quali $a > 0$ tale sistema ammette modi oscillanti?
2. Per quali a tali modi sono instabili?

Soluzione

1. Perché il sistema ammetta modi oscillanti, devono esservi autovalori a parte immaginaria non nulla. Il polinomio caratteristico è

   $$P(\lambda) = det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & a \\ -3 & \lambda + 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 + 3a.$$

   Uguagliando a zero si trova

   $$\lambda_{1,2} = -\frac{3 \pm \sqrt{1 - 12a}}{2},$$

   da cui si evince che affinché gli autovalori abbiano parte immaginaria non nulla deve essere

   $$a > \frac{1}{12}.$$

2. Poiché per $a > 1/12$ la parte reale degli autovalori è strettamente minore di zero (infatti $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = -3/2$), tutti i modi oscillanti sono stabili.

3.4 Esercizio

Trovare la matrice A del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ la cui soluzione generale è

$$x(t) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t},$$

dove α_1 e α_2 sono scalari che dipendono dalla condizione iniziale.

Soluzione

La matrice A è una matrice 2×2 i cui autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Inoltre, $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ devono essere autovettori associati, rispettivamente, a λ_1 e λ_2. Cioè deve essere:

$$\begin{cases} Au_1 &= \lambda_1 u_1 \\ Au_2 &= \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

ossia, posto $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Tale sistema di equazioni equivale al seguente, nelle incognite a_{ij}:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} &= -1 \\ a_{21} + a_{22} &= -1 \\ a_{11} - a_{12} &= -2 \\ a_{21} - a_{22} &= -2 \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Esercizio

Tutte le soluzioni del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$ con $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tendono ad una retta dello spazio $\mathbb{R}^3$. Quale?

Soluzione

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 1$. La soluzione generale è dunque del tipo:

$$x(t) = \alpha_1 u_1 e^{-2t} + \alpha_2 u_2 e^{-t} + \alpha_3 u_3 e^{t},$$

dove gli u_i sono autovettori associati a λ_i e gli α_i sono scalari costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Per $t \to \infty$ i primi due addendi a secondo membro tendono esponenzialmente a zero, dunque ogni soluzione tende alla retta cui u_3 è parallelo. Per determinare tale retta è sufficiente risolvere la $(\lambda_3 I - A)u = 0$, ossia

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

le cui infinite soluzioni

$$u = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R},$$

individuano la retta cercata.

3.6 Esercizio

È dato il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

con $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Assumendo $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $y(t) = -e^{-t}$, si determinino le condizioni iniziali del sistema.
2. Si determini B in modo che la risposta all'impulso (applicato al tempo $t = 0$ a partire da condizioni iniziali nulle) sia $y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

Soluzione

1. Applicando la formula di Lagrange, si ha:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = x_1(0)e^{-t} + x_2(0)e^{-2t}.$$

Affinché sia $y(t) = -e^{-t}$ deve essere $x_1(0) = -1$ e $x_2(0) = 0$. La condizione iniziale cercata è pertanto:

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. La risposta all'impulso in $t = 0$ è $y(t) = Ce^{At}B$, pertanto deve essere

$$y(t) = Ce^{At}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = B_1e^{-t} + B_2e^{-2t} = e^{-t} - e^{-2t},$$

da cui

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.7 Esercizio

È dato il sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

con $A = \begin{bmatrix} \sigma & -1 \\ 1 & \sigma \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Verificare che per $\sigma < 0$ i modi del sistema sono oscillanti smorzati.

2. Determinare i valori di σ per i quali, detta $y_l(t)$ la risposta libera a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, si ha:

$$|y_l(t)| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Soluzione

1. Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 2\sigma\lambda + \sigma^2 + 1$, le cui radici sono:

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm i.$$

Dunque gli autovalori del sistema sono complessi coniugati ($\Rightarrow$ modi oscillanti) con parte reale pari a $\sigma < 0$ ($\Rightarrow$ smorzati).

2. Ricordando che $\exp\begin{pmatrix} \sigma & -\omega \\ \omega & \sigma \end{pmatrix} = e^{\sigma}\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$, si ha:

$$y_l(t) = Ce^{At}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{\sigma t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -e^{\sigma t}\sin t,$$

il cui andamento per $t \geq 0$ è illustrato in Fig.1. Osservando che il grafico di $y_l(t)$ è confinato fra le due curve di equazione $\pm e^{\sigma t}$, le quali assumono per $t = 0$ i valori ± 1 quale che sia σ, segue immediatamente che la condizione

$$|y_l(t)| \leq 1, \forall t \geq 0$$

è verificata se e solo se $\sigma \leq 0$.

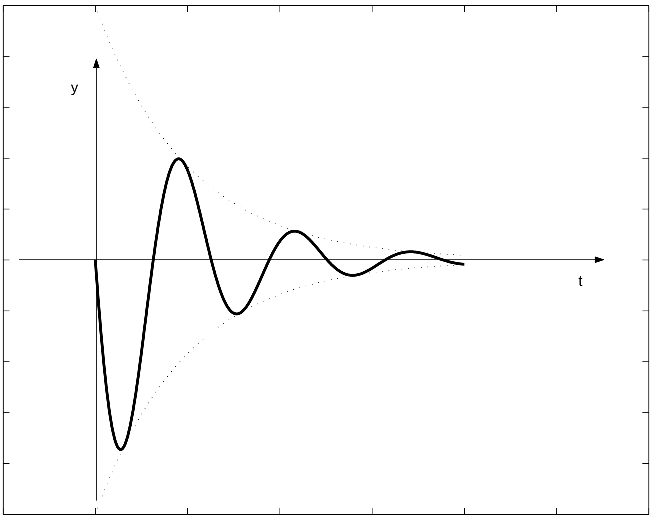

Figura 1:

3.8 Esercizio

È dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

dove $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & 0 \\ -12 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Si dica per quali β il sistema è asintoticamente stabile, nei tre casi $\alpha = 0, 1, 2$.
2. Per $\alpha = 0$ e $\beta = -1$, si dica quali sono le condizioni iniziali per cui lo stato non diverge.
3. Per $\alpha = 0$ e $\beta = -1$, si dica quali sono le condizioni iniziali per cui l'uscita non diverge.

Soluzione

1. Nel caso $\alpha = 0$ la matrice è triangolare inferiore. Gli autovalori sono pertanto gli elementi sulla diagonale principale, ossia $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = \beta$ e $\lambda_3 = 2$. Poiché indipendentemente da β, l'autovalore λ_3 è sempre reale positivo, il sistema è instabile. Nel caso $\alpha = 1$, si osserva che la prima e la terza riga della matrice A sono fra esse proporzionali. Dunque la matrice A è singolare ed ammette almeno un autovalore nullo. Il sistema quindi non è asintoticamente stabile (al più potrebbe esserlo semplicemente). Nel caso $\alpha = 2$, il

polinomio caratteristico risulta essere

$$P(\lambda) = det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda + 6 & 0 & 2 \\ -1 & \lambda - \beta & 0 \\ +12 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = (\lambda - \beta)(\lambda^2 + 4\lambda + 12),$$

le cui radici sono β e le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 + 4\lambda + 12 = 0$. Dunque condizione necessaria per la asintotica stabilità è che si abbia $\beta < 0$. Poiché le soluzioni dell'equazione $\lambda^2 + 4\lambda + 12 = 0$, come è facile verificare, hanno parte reale negativa, tale condizione è anche sufficiente.

2. Le condizioni iniziali per cui lo stato non diverge sono tutti e soli quegli stati che, espressi rispetto ad una base di autovettori, hanno nulle le componenti relative agli autovettori associati a modi instabili. Nel caso in esame agli autovalori $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ sono associati gli autovettori

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/5 \\ 3/2 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pertanto le condizioni iniziali per cui lo stato non diverge sono tutte e sole quelle della forma:

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1/5 \\ 3/2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

3. Essendo $y(t) = Cx(t)$, le condizioni iniziali individuate al punto precedente, ossia $x = \alpha u_1 + \beta u_2$, sono certamente tali che l'uscita non diverge. Resta da verificare se vi siano delle condizioni iniziali per le quali lo stato diverge ma l'uscita no. Per la sovrapposizione degli effetti, è sufficiente verificare se l'uscita diverge o meno per condizioni iniziali del tipo:

$$x = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Dal momento che vale la:

$$y(t) = Ce^{At}x(0),$$

si potrebbe procedere con il calcolo di e^{At} per poi imporre $x(0) = \gamma[\ 0\ 0\ 1\ ]^T$. Nel caso in esame c'è però un metodo alternativo: scrivendo la $\dot{x}(t) = Ax(t)$ per componenti si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= -6x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -12x_1(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

La particolare struttura del sistema permette di risolvere le equazioni differenziali in cascata: dalla prima, posto $x_1(0) = 0$, segue $x_1(t) = 0 \ \forall t \geq 0$. Sostituendo nella seconda e ponendo $x_2(0) = 0$ si ottiene $x_2(t) = 0 \ \forall t \geq 0$. Dalla terza, posto $x_3(0) = \gamma$ si ottiene $x_3(t) = \gamma e^{2t}$. Pertanto, in corrispondenza di condizioni iniziali del tipo (4), l'uscita risulta:

$$y(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma e^{2t} \end{bmatrix} = 0.$$

Dunque per condizioni iniziali allineate con u_3 l'uscita è non divergente (in particolare è identicamente nulla). Dal principio di sovrapposizione degli effetti e dall'osservazione che la somma di funzioni non divergenti è non divergente, segue che le condizioni iniziali per cui l'uscita non diverge sono:

$$x = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

ossia

$$x \in \mathbb{R}^3.$$

4 Sistemi non–lineari

4.1 Esercizio

È dato il sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) - \alpha(1 + x_2^2(t))u(t)\end{aligned}$$

Si valutino i punti di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ al variare dell'ingresso u, in funzione del parametro α.

Soluzione

Il sistema appartiene alla classe dei sistemi non lineari invarianti a tempo continuo, che sono descritti in generale dalla

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)),$$

dove f è una funzione a valori vettoriali di variabile vettoriale. Nel caso in esame, posto $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ e $f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{bmatrix}$ si ha:

$$\begin{aligned}f_1(x,u) &= x_1 + x_2\\ f_2(x,u) &= x_2 - \alpha(1 + x_2^2)u\end{aligned}$$

All'equilibrio la derivata del vettore di stato deve essere nulla, cioè deve aversi:

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0 \\ f_2(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{x}_2 - \alpha(1 + \bar{x}_2^2)\bar{u} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Dalla prima delle (5) si ottiene subito

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2,$$

mentre la seconda può essere riscritta come segue:

$$-\alpha\bar{u}\bar{x}_2^2 + \bar{x}_2 - \alpha\bar{u} = 0. \tag{6}$$

Per $\bar{u} = 0$ si ha $\bar{x}_2 = 0$ e dunque il punto di equilibrio $(0, 0)$. Per $\bar{u} \neq 0$ la (6) è un'equazione del secondo grado in $\bar{x}_2$, le cui soluzioni sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2\bar{u}^2}}{-2\alpha\bar{u}}.$$

Poiché sono accettabili solo le soluzioni reali, deve essere $\Delta = 1 - 4\alpha^2\bar{u}^2 \geq 0$, ossia $|\alpha| \leq \frac{1}{2|\bar{u}|}$. Riassumendo:

1. per $u = 0$ si ha l'unico punto di equilibrio $x_1 = x_2 = 0$.
2. Per $u \neq 0$ si danno i seguenti casi:
   - $|\alpha| > \frac{1}{2|\bar{u}|} \Rightarrow$ nessun punto di equilibrio.
   - $|\alpha| = \frac{1}{2|\bar{u}|} \Rightarrow$ un unico punto di equilibrio $x_1 = x_2 = \frac{1}{2\alpha\bar{u}}$.
   - $|\alpha| < \frac{1}{2|\bar{u}|} \Rightarrow$ due punti di equilibrio $x_1 = x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2\bar{u}^2}}{-2\alpha\bar{u}}$.

4.2 Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -(x_1(t) - x_2(t))(1 - x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= \alpha x_1(t) + x_2^2(t)\end{aligned}$$

1. Si valutino i punti di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ al variare del parametro α.
2. Posto $\alpha = 2$ si dica se l'origine è punto di equilibrio stabile, instabile o asintoticamente stabile.

Soluzione

1. Nei punti di equilibrio deve aversi:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = 0\end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases}-(x_1(t) - x_2(t))(1 - x_1(t)) = 0 \\ \alpha x_1(t) + x_2^2(t) = 0\end{cases} \tag{7}$$

Dalla prima delle (7) segue $x_1 = x_2$ oppure $x_1 = 1$. Nel primo caso, sostituendo $x_1 = x_2$ nella seconda equazione si ottiene

$$\alpha x_2(t) + x_2^2(t) = (\alpha + x_2)x_2 = 0,$$

che ha per soluzioni $x_2 = -\alpha$ (da cui i punti di equilibrio $(-\alpha, -\alpha)$) e $x_2 = 0$ (da cui il punto di equilibrio $(0, 0)$). Nel caso $x_1 = 1$ la seconda equazione diventa invece

$$\alpha + x_2^2(t) = 0,$$

ossia

$$x_2 = \pm\sqrt{-\alpha}, \quad \alpha \leq 0$$

da cui i punti di equilibrio $(1, \pm\sqrt{-\alpha})$. Riassumendo si può concludere che, al variare di α i punti di equilibrio sono i seguenti:

$$\begin{array}{rl}(-\alpha, -\alpha) & \forall\alpha \\ (0, 0) & \forall\alpha \\ (1, \pm\sqrt{-\alpha}) & \alpha \leq 0.\end{array}$$

2. Si tratta di linearizzare il sistema attorno all'origine (che per quanto visto sopra è punto di equilibrio) e studiare la stabilità del sistema lineare così ottenuto. Posto $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

e $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$, il sistema è ricondotto alla forma $\dot{x} = f(x)$. La matrice A associata al sistema linearizzato è la matrice Jacobiana della mappa f, calcolata nell'origine, ossia la $[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]\Big|_{(0,0)}$. Risulta:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché tale matrice possiede un autovalore a parte reale positiva (gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$) si può concludere che per $\alpha = 2$ l'origine è punto di equilibrio instabile. Per esercizio, si studi la stabilità dell'origine al variare di α.

4.3 Esercizio

Dato il sistema dinamico non lineare

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -6x_2(t)\sin(\pi x_1(t))\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)x_2(t) + 2x_1(t)u(t)\\ y(t) &= x_1^2(t) + x_2^2(t)\end{aligned}$$

1. Si calcolino stati e uscite di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = \bar{u} = 1$.
2. Si scrivano le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno di ciascuno stato di equilibrio.

Soluzione

Il sistema ha la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t))\\ y(t) &= g(x(t), u(t))\end{aligned}$$

con

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_2\sin(\pi x_1) \\ -x_1x_2 + 2x_1u \end{bmatrix},\ g(x,u) = x_1^2 + x_2^2.$$

Gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso $\bar{u}$ sono le soluzioni di $f(x, \bar{u}) = 0$, ossia del sistema

$$\begin{aligned}-6x_2\sin(\pi x_1) &= 0\\ -x_1x_2 + 2x_1 &= 0\end{aligned}$$

Dalla prima segue $x_2 = 0$ (e quindi dalla seconda $x_1 = 0$) oppure $x_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. In quest'ultimo caso si osservi che per $x_1 = 0$ ogni x_2 è di equilibrio (essendo la seconda equazione soddisfatta $\forall x_2$) mentre se $x_1 \neq 0$, dalla seconda segue necessariamente $x_2 = 2$. Riassumendo, gli stati di equilibrio corrispondenti all'ingresso $\bar{u} = 1$ sono:

$$\begin{gathered}\bar{x}_1 = 0, \quad \forall x_2\\ \bar{x}_1 = \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \bar{x}_2 = 2\end{gathered}$$

Il sistema linearizzato intorno al generico stato di equilibrio è descritto dalle equazioni:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

dove

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})},\quad B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})},\quad C = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}.$$

Calcolando ciascun termine si trova:

$$A = \begin{bmatrix} -6\pi\bar{x}_2\cos(\pi\bar{x}_1) & -6\sin(\pi x_1) \\ -\bar{x}_2 + 2 & -\bar{x}_1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\bar{x}_1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 2\bar{x}_2 \end{bmatrix}.$$

4.4 Esercizio

Con riferimento al sistema non lineare dell'esercizio precedente, si discuta la stabilità dei punti di equilibrio per $\bar{u} = 1$.

Soluzione

Si ricorda che l'analisi del sistema linearizzato fornisce informazioni sulla stabilità del punto di equilibrio solo nei seguenti casi:

1. la matrice associata al sistema linearizzato ha almeno un autovalore a parte reale positiva (in tal caso il punto di equilibrio del sistema originale è instabile);

2. la matrice associata al sistema linearizzato ha tutti gli autovalori a parte reale negativa (in tal caso il punto di equilibrio del sistema originale è asintoticamente stabile).

In tutti gli altri casi non si può affermare nulla sulla stabilità del punto di equilibrio sulla base della sola analisi del sistema linearizzato. I punti di equilibrio corrispondenti all'ingresso $\bar{u} = 1$ sono, come visto nell'esercizio precedente:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \forall \bar{x}_2 \tag{8}$$

e

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

mentre la matrice del sistema linearizzato è

$$A = \begin{bmatrix} -6\pi\bar{x}_2 \cos(\pi\bar{x}_1) & -6\sin(\pi x_1) \\ -\bar{x}_2 + 2 & -\bar{x}_1 \end{bmatrix}.$$

Nel caso dei punti di equilibrio di tipo (8), tale matrice diventa

$$A = \begin{bmatrix} -6\pi\bar{x}_2 & 0 \\ -\bar{x}_2 + 2 & 0 \end{bmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -6\pi\bar{x}_2$. Dunque il punto di equilibrio è certamente instabile per $\bar{x}_2 < 0$ perché il sistema linearizzato ha un autovalore a parte reale positiva. Per $\bar{x}_2 \geq 0$, l'analisi del sistema linearizzato non consente di concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio. Si fa notare che per $\bar{x}_2 = 0$ la matrice del sistema linearizzato diventa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

la cui forma canonica di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

il che implica che il sistema linearizzato è instabile (i suoi modi sono e^{0t} e te^{0t}). Tuttavia non vi è alcun autovalore a parte reale positiva e quindi ciò non implica la instabilità del punto di equilibrio.

Nel caso dei punti di equilibrio di tipo (9), la matrice dinamica del sistema linearizzato risulta

$$A = \begin{bmatrix} -12\pi\cos(k\pi) & 0 \\ 0 & -k \end{bmatrix}.$$

Essendo la matrice diagonale, gli autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale. Si danno i seguenti tre casi:

1. se $k < 0$, almeno uno degli autovalori è positivo e quindi lo stato di equilibrio è instabile;
2. se $k > 0$ e k è pari, allora $\cos(k\pi) = 1$ ed entrambi gli autovalori sono negativi: lo stato di equilibrio è pertanto asintoticamente stabile;
3. se $k > 0$ e k è dispari, allora $\cos(k\pi) = -1$, un autovalore è positivo e quindi lo stato di equilibrio è instabile.

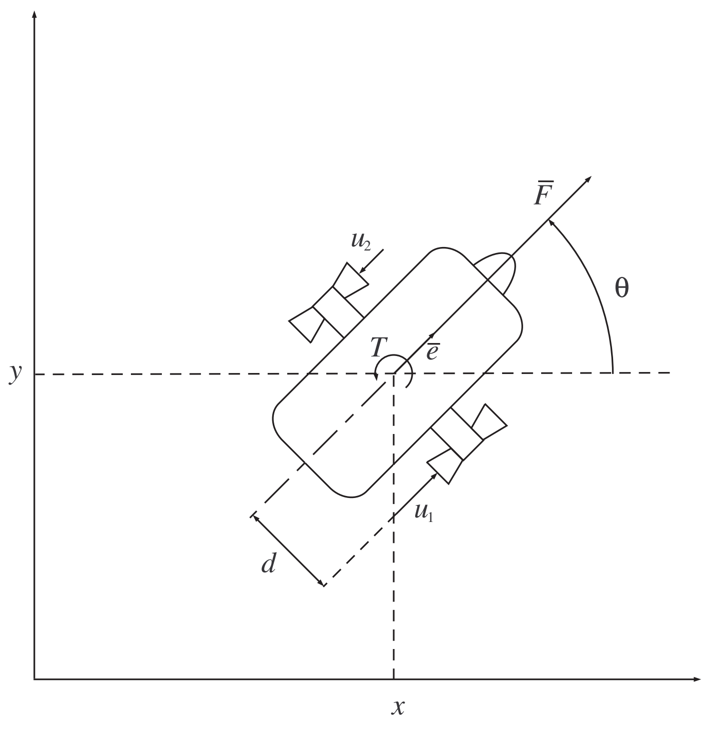

Figura 2:

4.5 Esercizio

Il veicolo spaziale di Fig.2 è vincolato a muoversi sul piano (x, y). La sua posizione è descritta dalla terna (x, y, θ), dove θ è l'angolo fra il vettore $\bar{e}$ parallelo all'asse di simmetria e l'asse x. Due coppie di propulsori, allineati con l'asse di simmetria, sono collocate ai lati del veicolo e permettono di controllare la spinta $\bar{F}$ e il momento T secondo le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= (u_1 + u_2)\bar{e} = m\dot{\bar{v}} \\ T &= (u_1 - u_2)d = J\dot{\omega} \end{aligned} \tag{10}$$

dove u_1 e u_2 sono le spinte sui due lati, m è la massa del veicolo, J il suo momento di inerzia, d la distanza fra i propulsori. Con $\bar{v}$ si indica il vettore velocità e con $\omega = \dot{\theta}$ la velocità angolare.

1. Si ricavi una rappresentazione di stato del sistema, assumendo come ingressi u_1 e u_2.
2. Si determinino gli stati di equilibrio e i corrispondenti ingressi.

Soluzione

1. Proiettando lungo gli assi coordinati la prima delle (10) si ottengono le seguenti:

$$\begin{aligned} F_x &= (u_1 + u_2)\cos\theta = m\ddot{x} \\ F_y &= (u_1 + u_2)\sin\theta = m\ddot{y} \end{aligned}$$

   le quali, assieme alla seconda delle (10) costituiscono un sistema di 3 equazioni differenziali del secondo ordine. Attraverso un opportuno cambio di variabili è possibile ricondursi a 6 equazioni del primo ordine. Posto infatti $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$, $x_5 = \theta$ e $x_6 = \dot{\theta}$ si ha:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = \frac{1}{m}(u_1 + u_2)\cos x_5 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \dot{x_4} = \frac{1}{m}(u_1 + u_2)\sin x_5 \\ \dot{x_5} = x_6 \\ \dot{x_6} = \frac{d}{J}(u_1 - u_2) \end{cases} \tag{11}$$

   che è del tipo $\dot{x} = f(x, u)$ ed è la rappresentazione di stato di un sistema dinamico non lineare invariante a tempo continuo.

2. Affinché uno stato sia di equilibrio, la derivata del vettore di stato deve essere nulla. Nel caso in esame deve dunque essere $\dot{x}_i = 0,\ i = 1 \dots 6$. Ora, dalla prima, terza e quinta delle (11) si ottiene subito $x_2 = x_4 = x_6 = 0$ mentre imponendo $x_6 = 0$ si ricava $u_1 = u_2$. Ma dalla seconda e quarta equazione, poiché non vi è alcun x_5 tale che $\cos x_5 = \sin x_5 = 0$

segue che deve aversi $u_1 = -u_2$. Ossia deve essere $u_1 = u_2 = 0$. La derivata del vettore di stato viene dunque ad essere indipendente da x_1, x_3, x_5. Riassumendo, gli stati e ingressi di equilibrio sono i seguenti:

$$\begin{cases} x_1 &= qualsiasi \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= qualsiasi \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= qualsiasi \\ x_6 &= 0 \\ u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \end{cases}$$

il che conferma l'intuizione che il veicolo può essere in equilibrio qualunque sia la sua posizione (x, y, θ) a patto che la velocità e la spinta siano nulle.

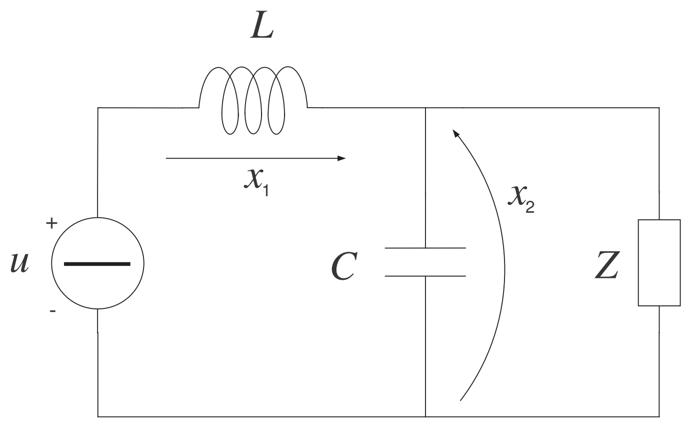

Figura 3:

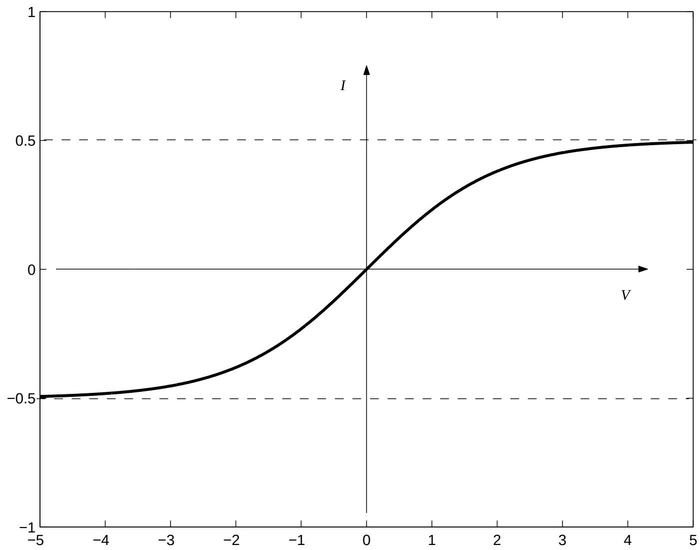

Figura 4:

4.6 Esercizio

Si consideri il circuito di Fig.3, dove il componente Z è un resistore non lineare con la seguente caratteristica corrente–tensione (il cui andamento è riportato in Fig.4):

$$I(V) = \frac{1}{1+e^{-V}} - \frac{1}{2}. \tag{12}$$

1. Si determini una rappresentazione di stato per il sistema, assumendo come ingresso $u(t)$ e come variabili di stato la corrente che attraversa l'induttore e la tensione a capi del condensatore.

2. Si verifichi che ogni ingresso $\bar{u}$ costante è di equilibrio per il sistema.

3. Si determinino le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio corrispondente all'ingresso $\bar{u} = 0$.

4. Si determinino l'ingresso (o gli ingressi) $\bar{u}$ tali che nell'intorno del corrispondente punto di equilibrio il sistema linearizzato sia equivalente a quello di Fig.5 (dove il componente non lineare è stato rimpiazzato da un resistore R).

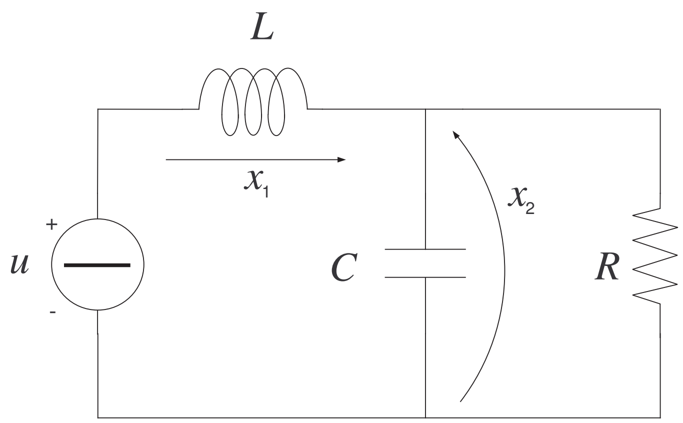

Figura 5:

Soluzione

1. La tensione ai capi del generatore deve eguagliare la somma delle tensioni ai capi dell'induttore e del condensatore:

$$u(t) = L\dot{x}_1 + x_2. \tag{13}$$

La corrente che attraversa Z è pari a quella che attraversa l'induttore meno quella che attraversa il condensatore:

$$\frac{1}{1+e^{-x_2}} - \frac{1}{2} = x_1 - C\dot{x}_2. \tag{14}$$

Riarrangiando la (13) e la (14) si ottiene la seguente rappresentazione di stato:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) & = & -\frac{x_2(t)}{L} + \frac{u(t)}{L} \\ \dot{x_2}(t) & = & \frac{x_1(t)}{C} - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{1+e^{-x_2(t)}} - \frac{1}{2}\right) \end{cases} \tag{15}$$

2. Ponendo $u(t) = \bar{u}$, $x_1(t) = \bar{x}_1$ e $x_2(t) = \bar{x}_2$ ed uguagliando a zero la derivata del vettore di stato si ottiene

$$\begin{cases} 0 & = & -\frac{\bar{x}_2}{L} + \frac{\bar{u}}{L} \\ 0 & = & \frac{\bar{x}_1}{C} - \frac{1}{C}\left(\frac{1}{1+e^{-\bar{x}_2}} - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava subito

$$\bar{x}_2 = \bar{u} \tag{16}$$

e di conseguenza dalla seconda si ottiene

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{1+e^{-\bar{u}}} - \frac{1}{2} \tag{17}$$

Dunque per il sistema ogni $\bar{u}$ è ingresso di equilibrio, a cui corrisponde lo stato di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dato dalle (16) e (17). Si noti che lo stato di equilibrio non dipende da L né da C (Perché?).

3. Per $\bar{u} = 0$ la (16) e (17) permettono di ricavare $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = 0$. Il sistema (15) è nella forma $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, pertanto il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è descritto dalla

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

con

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}, \quad B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})}.$$

In particolare, si ha:

$$A = \left.\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C}\frac{e^{-\bar{x}_2}}{(1+e^{-\bar{x}_2})^2} \end{bmatrix}\right|_{(\bar{x},\bar{u})} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{4C} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. È facile verificare che la rappresentazione di stato del circuito di Fig.5 è la seguente:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{RC} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Pertanto affinché il sistema linearizzato sia equivalente a quello di Fig.5 deve essere:

$$\frac{e^{-\bar{x}_2}}{(1+e^{-\bar{x}_2})^2} = \frac{e^{-\bar{u}}}{(1+e^{-\bar{u}})^2} = \frac{1}{R},$$

dove la prima uguaglianza è conseguenza della (16). Per trovare gli ingressi $\bar{u}$ che soddisfano tale condizione, si ponga $t = e^{-\bar{u}}$ ottenendo in tal modo:

$$\frac{t}{(1+t)^2} = \frac{1}{R},$$

da cui, moltiplicando entrambi i membri per $(1+t)^2 \neq 0$ e riarrangiando si ricava l'equazione di secondo grado in t

$$t^2 + (2-R)t + 1 = 0 \tag{18}$$

le cui soluzioni sono:

$$t_{1,2} = \frac{(R-2) \pm \sqrt{R(R-2)}}{2}.$$

Dal momento che $t = e^{-\bar{u}} > 0$ sono accettabili solo le soluzioni reali positive, ossia quelle corrispondenti a $R > 2$. In questo caso si avranno i due ingressi di equilibrio:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -\ln t_1 \\ \bar{u}_2 &= -\ln t_2 \end{aligned}$$

Per $R \leq 2$ nessun ingresso di equilibrio è tale che il circuito linearizzato sia equivalente a quello lineare di Fig.5.

Si osservi che quanto appena fatto è consistito nel cercare il punto di lavoro del circuito non lineare per cui la pendenza della curva caratteristica corrente-tensione fosse pari a $1/R$. Come si vede dalla Fig.4, tale curva caratteristica è dispari pertanto ci si deve attendere che le tensioni di equilibrio siano simmetriche rispetto allo zero, ossia $\bar{u}_1 = -\bar{u}_2$. In effetti si può provare che tali tensioni sono simmetriche e si invita a farlo per esercizio (suggerimento: affinché si abbia $\bar{u}_1 = -\bar{u}_2$ deve essere, per una nota proprietà dei logaritmi, $t_1 = t_2^{-1}$, quindi bisogna provare che le radici della (18) sono l'una il reciproco dell'altra).

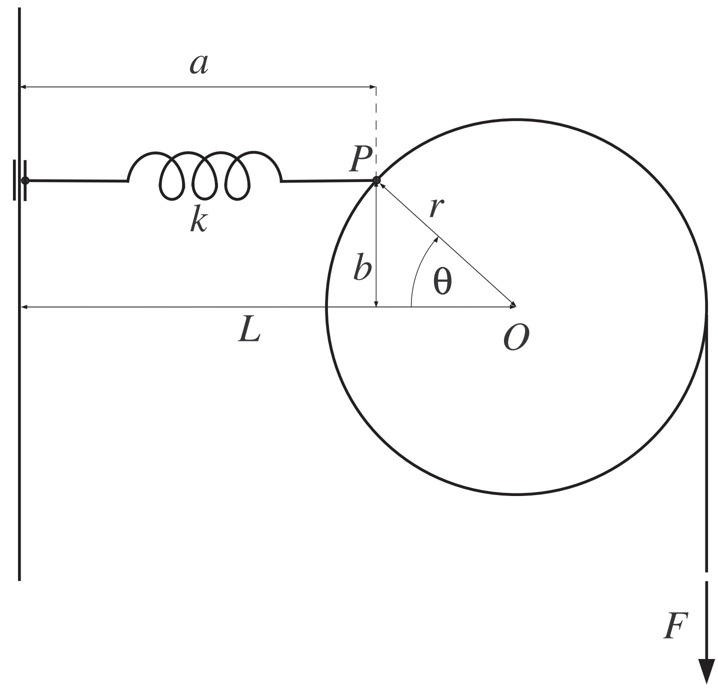

Figura 6:

4.7 Esercizio

Si consideri il meccanismo illustrato in Fig.6, costituito da un disco di raggio r libero di ruotare attorno al proprio asse. Il punto P sul bordo del disco è collegato tramite una molla di costante elastica k ad una slitta la cui guida è posta ad una distanza L dal centro del disco. Il disco è soggetto ad una forza F applicata tramite una fune come in figura. Assumendo che la molla sia a riposo quando $\theta = 0$, ossia quando $a = L - r$ e tenendo conto anche di una coppia d'attrito proporzionale alla velocità angolare del disco:

1. determinare una rappresentazione di stato del sistema, considerando come ingresso la forza F e come uscita la posizione del disco;
2. trovare l'ingresso $\bar{F}$ costante per cui l'uscita $\theta = \pi/4$ sia di equilibrio;
3. trovare l'ingresso $\bar{F}$ costante per cui l'uscita $\theta = 3\pi/4$ sia di equilibrio;
4. discutere la stabilità degli stati di equilibrio trovati.

Soluzione

1. Il disco è soggetto alla coppia $C_F(t)$ dovuta alla forza $F(t)$, alla coppia $C_E(t)$ dovuta alla molla e alla coppia di attrito $C_A(t)$. Pertanto, indicando con I il momento di inerzia del

disco rispetto al suo asse si può scrivere:

$$I\ddot{\theta}(t) = C_F(t) + C_E(t) + C_A(t).$$

Assumendo come positivo il verso di θ indicato in figura, si avrà evidentemente

$$C_F(t) = rF(t)$$

ed indicando con μ il coefficiente di attrito,

$$C_A(t) = -\mu\dot{\theta}(t).$$

La forza elastica è pari alla costante elastica k moltiplicata per l'elongazione della molla rispetto alla posizione di riposo, che vale $r - r\cos\theta$, mentre il braccio è $b = r\sin\theta$. Si ha dunque

$$C_E(t) = -kr(r - r\cos\theta)r\sin\theta = -kr^2(1 - cos\theta)\sin\theta.$$

Il sistema è dunque descritto dalla equazione differenziale del secondo ordine:

$$I\ddot{\theta}(t) = rF(t) - kr^2(1 - cos\theta)\sin\theta - \mu\dot{\theta}(t).$$

Ponendo $x_1 = \theta$ e $x_2 = \dot{\theta}$, assumendo F come ingresso e x_1 come variabile di uscita ci si riconduce alla seguente rappresentazione di stato:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) &= x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) &= -\frac{kr^2}{I}(1 - cos x_1(t))\sin x_1(t) - \frac{\mu}{I}x_2(t)(t) + \frac{r}{I}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

2. Nel punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ la derivata del vettore di stato deve essere nulla:

$$\begin{cases} 0 &= \bar{x}_2 \\ 0 &= -\frac{kr^2}{I}(1 - cos\bar{x}_1)\sin\bar{x}_1 - \frac{\mu}{I}\bar{x}_2 + \frac{r}{I}\bar{u} \end{cases} \tag{19}$$

La prima equazione dice che all'equilibrio la velocità angolare deve essere nulla. Ponendo $\bar{x}_2 = 0$ nella seconda e riarrangiando si ottiene

$$\bar{u} = kr(1 - cos\bar{x}_1)\sin\bar{x}_1. \tag{20}$$

Tale relazione permette di calcolare, al variare di $\bar{x}_1$, l'ingresso di equilibrio corrispondente. In particolare, per $\bar{x}_1 = \pi/4$ si ottiene

$$\bar{u} = kr\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right).$$

3. Per quanto visto al punto precedente basta porre $\bar{x}_1 = 3\pi/4$ nella (20) per ottenere l'ingresso di equilibrio

$$\bar{u} = kr\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2}\right).$$

4. La matrice dinamica del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$ è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kr^2}{I}(\sin^2 \bar{x}_1 + \cos \bar{x}_1 - \cos^2 \bar{x}_1) & -\frac{\mu}{I} \end{bmatrix},$$

il cui polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\mu}{I}\lambda + \frac{kr^2}{I}(\sin^2 \bar{x}_1 + \cos \bar{x}_1 - \cos^2 \bar{x}_1).$$

Nel caso $\bar{x}_1 = \pi/4$ si ha

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\mu}{I}\lambda + \frac{kr^2\sqrt{2}}{2I}.$$

Poiché tutti i coefficienti sono concordi, tutte le radici del polinomio (ossia tutti gli autovalori di A) hanno parte reale negativa: il punto di equilibrio è stabile. Nel caso $\bar{x}_1 = 3\pi/4$ si ha invece

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\mu}{I}\lambda - \frac{kr^2\sqrt{2}}{2I},$$

i cui coefficienti sono discordi per cui almeno una radice ha parte reale positiva: il punto di equilibrio è pertanto instabile.

5 Sistemi lineari, analisi in frequenza

5.1 Esercizio

Determinare la funzione di trasferimento W(s) del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

nei seguenti casi:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, $D = 2$;
2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 3$;
3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $D = 0$.

Soluzione

1. La funzione di trasferimento ha l'espressione seguente:

   $$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

   Ricordando la formula per il calcolo dell'inversa di matrice $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}[\alpha_{ij}]^T$ (dove α_{ij} è il complemento algebrico dell'elemento di indici i, j), si ha nel caso in esame:

   $$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-4}{(s-1)(s-4)} & \frac{2}{(s-1)(s-4)} \\ 0 & \frac{s-1}{(s-1)(s-4)} \end{bmatrix}.$$

   Segue dunque

   $$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s-4}{(s-1)(s-4)} & \frac{2}{(s-1)(s-4)} \\ 0 & \frac{s-1}{(s-1)(s-4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 = \frac{2s^2 - 11s + 11}{s^2 - 5s + 4}.$$

2. Si può procedere come nel caso precedente, trovando

   $$W(s) = \frac{3s^2 - 20s - 2}{s^2 - 7s}.$$

In alternativa la funzione di trasferimento può essere calcolata come il rapporto fra le trasformate dell'uscita e dell'ingresso con condizioni iniziali nulle. Si scrivono le equazioni del sistema in forma scalare:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & 3x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & 6x_1(t) + 4x_2(t) + u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) + 3u(t) \end{array} .$$

Se ne calcolano le trasformate di Laplace ponendo $x_1(0) = x_2(0) = 0$ e si ottiene, con ovvio significato dei simboli

$$\begin{array}{rcl} sX_1(s) & = & 3X_1(s) + 2X_2(s) + U(s) \\ sX_2(s) & = & 6X_1(s) + 4X_2(s) + U(s) \\ Y(s) & = & X_1(s) + 3U(s) \end{array} .$$

Eliminando le variabili $X_1(s)$ e $X_2(s)$ si ha

$$Y(s) = \frac{3s^2 - 20s - 2}{s^2 - 7s} U(s).$$

e dunque

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s^2 - 20s - 2}{s^2 - 7s}.$$

3. Procedendo in uno dei modi descritti ai punti precedenti si ottiene:

$$W(s) = -\frac{1}{s^2 + 5s + 6}.$$

5.2 Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

1. determinarne, al variare del parametro α, la funzione di trasferimento W(s);
2. dire per quali valori di α la funzione di trasferimento non contiene le informazioni relative ai modi instabili del sistema.

Soluzione

1. Adottando uno qualsiasi dei metodi illustrati nell'Esercizio 5.1 si trova

$$W(s) = \frac{s+\alpha-3}{s^3+2s^2-s-2} = \frac{s+\alpha-3}{(s-1)(s+1)(s+2)}.$$

In questo caso però la particolare struttura di B e C permette di calcolare $W(s)$ in maniera più rapida:

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -(\alpha-2) & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si supponga di calcolare $C(sI-A)^{-1}B$ moltiplicando prima $(sI-A)^{-1}$ a destra per B e poi il vettore ottenuto a sinistra per C. Poiché B ha tutti gli elementi nulli tranne l'ultimo, moltiplicandola per $(sI-A)^{-1}$ si sortisce l'effetto di 'selezionare' la sola ultima colonna della $(sI-A)^{-1}$. D'altra parte, C ha tutti gli elementi nulli tranne il primo e pertanto 'seleziona' la sola prima riga del vettore colonna $(sI-A)^{-1}B$. In altre parole, $C(sI-A)^{-1}B$ sarà uguale all'elemento di indici $(1,3)$ (corrispondenti alla prima riga e all'ultima colonna) della matrice $(sI-A)^{-1}$. Ossia al complemento algebrico dell'elemento di indici $(3,1)$ della $(sI-A)$ diviso per $det(sI-A)$. Poiché tale complemento algebrico è:

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1} det \begin{pmatrix} -(\alpha-2) & -1 \\ s-1 & -1 \end{pmatrix} = s+\alpha-3,$$

si ha

$$W(s) = \frac{\alpha_{31}}{(s-1)(s+1)(s+2)} = \frac{s+\alpha-3}{(s-1)(s+1)(s+2)}.$$

2. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -2$, pertanto il sistema è instabile ed ha due modi stabili associati agli autovalori negativi λ_2 e λ_3 e un modo instabile, associato a λ_1. L'informazione relativa al modo instabile è data dalla presenza del fattore $(s-1)$ a denominatore della funzione di trasferimento. Il denominatore della funzione di trasferimento conserva l'informazione relativa al modo instabile a patto che non si verifichi una cancellazione relativa al modo instabile cioè a patto che si abbia $s+\alpha-3 \neq s-1$, ovvero $\alpha \neq 2$. In caso contrario la funzione di trasferimento diventerebbe

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

e l'informazione relativa al modo instabile andrebbe perduta.

5.3 Esercizio

Dato il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

determinare la risposta $y(t)$ agli ingressi

1. $u(t) = 1(t)$ (gradino);
2. $u(t) = \delta(t)$ (impulso);
3. $u(t) = e^{-4t}, \ t \geq 0$.

Soluzione

1. Poiché la trasformata di Laplace del gradino è $U(s) = \frac{1}{s}$, la trasformata dell'uscita è :

   $$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

   Per calcolare $y(t)$ conviene esprimere $Y(s)$ come sommatoria di fratti semplici

   $$\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{s+3}, \tag{21}$$

   dove le costanti A, B, C e D si determinano nel modo seguente:

   $$\begin{aligned} A &= \lim_{s\to 0} sY(s) &&= 1/6 \\ B &= \lim_{s\to -1}(s+1)Y(s) &&= -1/2 \\ C &= \lim_{s\to -2}(s+2)Y(s) &&= 1/2 \\ D &= \lim_{s\to -3}(s+3)Y(s) &&= -1/6. \end{aligned}$$

   Alternativamente si poteva scrivere la (21) in questo modo:

   $$\frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{(s+1)(s+2)(s+3)A + s(s+2)(s+3)B + s(s+1)(s+3)C + s(s+1)(s+2)D}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

   ed eguagliare i coefficienti dei polinomi di terzo grado a numeratore dei due membri, ottenendo

   $$\begin{aligned} 0 &= A + B + C + D \\ 0 &= 6A + 5B + 4C + 3D \\ 0 &= 11A + 6B + 3C + 2D \\ 1 &= 6A, \end{aligned}$$

   rispettivamente per i coefficienti di s^3, s^2, s^1 e s^0. Si tratta di un sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite risolvendo il quale si perviene agli stessi valori di A, B, C e D determinati in precedenza. Si può dunque scrivere

   $$Y(s) = \frac{1}{6s} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+3)}.$$

Ricordando che $\frac{1}{s+\lambda}$ è la trasformata di Laplace di $e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ e la proprietà di linearità della trasformazione, si ha

$$y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-3t}, \quad t \geq 0,$$

il cui andamento è riportato in Fig.7. Si osservi che, per $t \to \infty$, $y(t)$ tende asintoticamente a 1/6 (che è il guadagno statico), come è confermato dal teorema del valore finale:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 1/6.$$

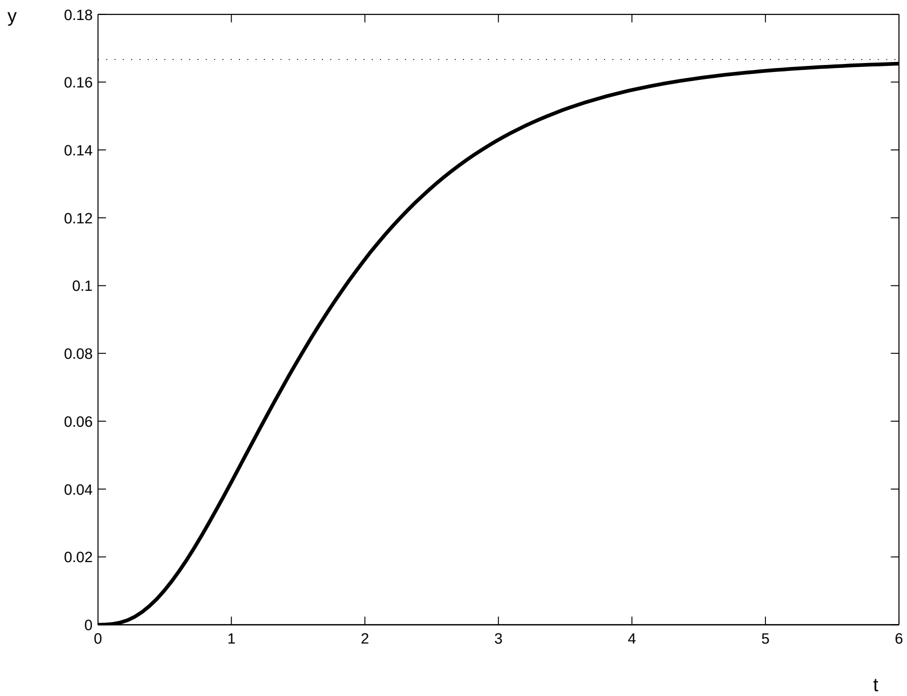

Figura 7:

2. La risposta all'impulso può essere calcolata (e si invita a farlo per esercizio) con il metodo illustrato al punto precedente ove si ponga $U(s) = 1$ (ossia la trasformata dell'impulso). Si osservi tuttavia che detta $Y_G(s)$ la trasformata della risposta al gradino (a partire da condizioni iniziali nulle) e $Y_I(s)$ la trasformata della risposta all'impulso (sempre da condizioni iniziali nulle), si ha

$$Y_I(s) = sY_G(s)$$

e quindi, ricordando che $L(f'(t)) = sF(s) - f(0)$ e ponendo $y(0) = 0$ si ottiene

$$y_I(t) = \frac{dy_G(t)}{dt}.$$

Dunque la risposta all'impulso è la derivata della risposta al gradino. Pertanto è sufficiente derivare l'espressione della risposta al gradino trovata al punto precedente, ottenendo:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad t \geq 0,$$

il cui andamento è riportato in Fig.8. Per esercizio: dimostrare che la risposta all'impulso è la derivata della risposta al gradino senza ricorrere alle trasformate ma applicando la formula di Lagrange.

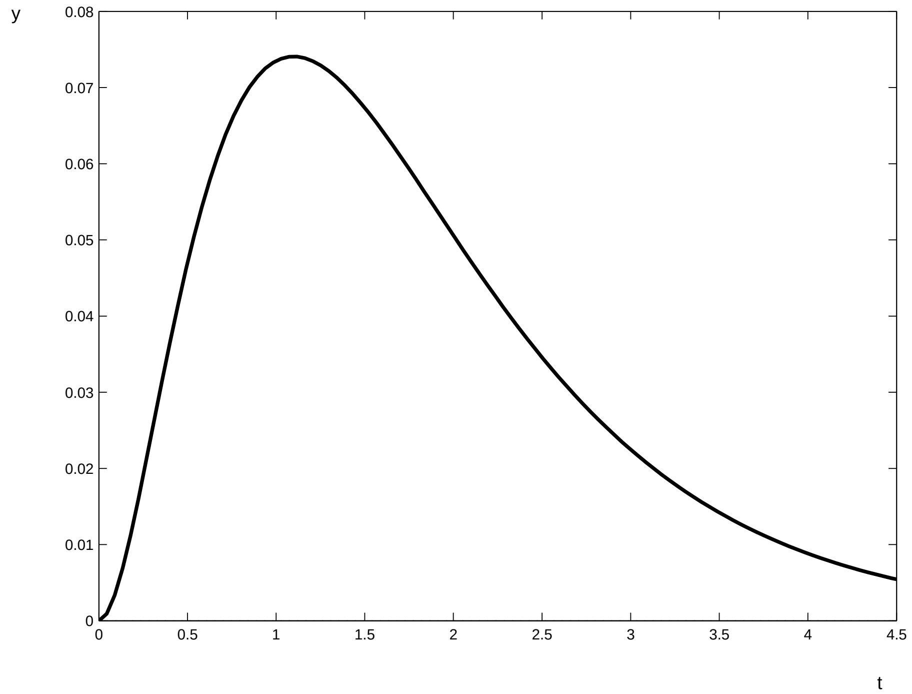

Figura 8:

3. La trasformata di Laplace dell'ingresso è in questo caso $U(s) = \frac{1}{s+4}$, dunque la trasformata dell'uscita è

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Ricorrendo ad uno dei metodi illustrati in precedenza, $Y(s)$ può essere così scomposta

$$Y(s) = \frac{1}{6(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{6(s+4)},$$

da cui

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-4t}, \quad t \geq 0,$$

il cui andamento è riportato in Fig.9.

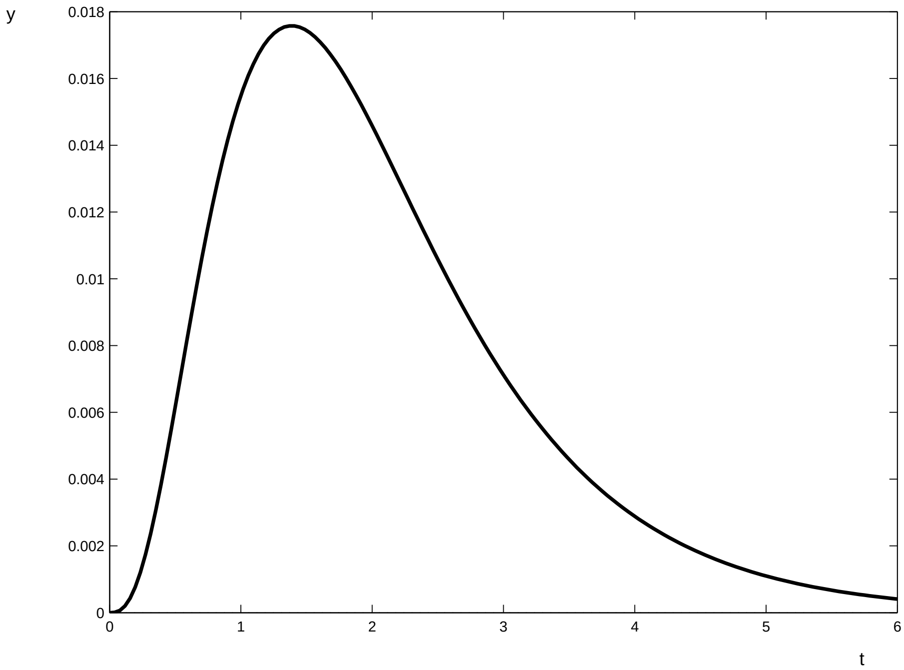

Figura 9:

5.4 Esercizio

Dire quale dei quattro grafici di Fig.(10) riporta l'andamento della risposta all'impulso per il sistema la cui funzione di trasferimento è:

$$W(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Soluzione

Escludiamo subito il grafico (c), perché $W(s)$ non ha poli complessi che possano determinare un andamento oscillante dell'uscita in assenza di una forzante. Sfruttando il teorema del valore iniziale è possibile poi appurare che la risposta corretta è la (b). Essendo infatti $U(s) = 1$ la trasformata di Laplace dell'impulso, la trasformata della risposta all'impulso è $W(s)$ stessa:

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

Applicando il teorema del valore iniziale si ha che

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(s+2)(s+3)(s+4)} = 0,$$

dunque la risposta all'impulso parte da $y(0) = 0$, il che permette di escludere il grafico (d). Applicando nuovamente il teorema del valore iniziale si ha

$$y'(0^+) = \lim_{s\to\infty} s(sY(s) - y(0)) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^3}{(s+2)(s+3)(s+4)} = 1,$$

pertanto $y(t)$ è crescente in $t = 0$ il che permette di escludere anche il grafico (a).

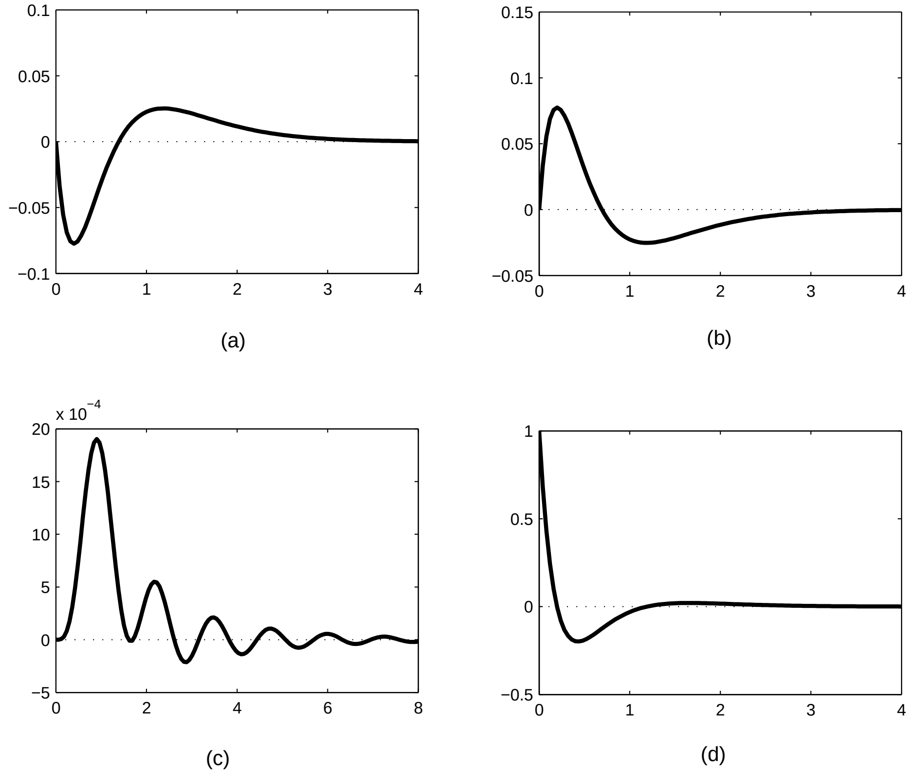

Figura 10:

5.5 Esercizio

Determinare l'andamento asintotico dell'uscita del sistema la cui funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{2}{s+4},$$

per l'ingresso $u(t) = \sin 3t$.

Soluzione

Essendo il sistema asintoticamente stabile, la funzione di trasferimento valutata in $s = j\omega$ fornisce modulo e sfasamento della risposta a regime ad un ingresso sinusoidale. Pertanto la risposta a regime avrà la forma

$$y_\infty(t) = |W(j3)| \sin(3t + \Phi(W(j3))).$$

Risulta

$$|W(j3)| = \frac{2}{|j3+4|} = \frac{2}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2}{5},$$

e ricordando che la fase del rapporto fra numeri complessi è la differenza delle fasi di numeratore e denominatore

$$\Phi(W(j3) = \Phi\left(\frac{2}{j3+4}\right) = 0 - \Phi(j3+4) = -\arctan\frac{3}{4}.$$

Si ha pertanto

$$y_\infty(t) = \frac{2}{5}\sin(3t - \arctan\frac{3}{4}).$$

Alternativamente, si poteva procedere determinando $y(t)$ e poi valutandone l'andamento per $t \to \infty$. Poiché la trasformata di Laplace di $\sin \omega t$ è $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, la trasformata dell'uscita risulta

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{2}{s+4}\frac{3}{s^2+9}$$

che può essere espressa nel modo seguente

$$\frac{6}{(s+4)(s^2+9)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+9}.$$

Portando a comun denominatore gli addendi di destra e imponendo l'identità dei polinomi a numeratore si ottengono le seguenti condizioni su A,B e C:

$$\begin{aligned} 0 &= A+B \\ 0 &= 4B+C \\ 6 &= 9A+4C \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{6}{25} \\ B &= -\tfrac{6}{25} \\ C &= \tfrac{24}{25} \end{aligned}$$

il che permette di scrivere

$$Y(s) = \frac{6}{25(s+4)} + \frac{24-6s}{25(s^2+9)} = \frac{6}{25(s+4)} + \frac{24}{25(s^2+9)} - \frac{6s}{25(s^2+9)}$$

e quindi, ricordando che la trasformata di Laplace di $cos\omega t$ è $\frac{s}{s^2+\omega^2}$:

$$y(t) = \frac{6}{25}e^{-4t} + \frac{8}{25}\sin 3t - \frac{6}{25}\cos 3t.$$

Il primo addendo tende a zero per $t \to \infty$ e quindi la risposta a regime risulta

$$\begin{aligned} y_\infty(t) &= \tfrac{8}{25}\sin 3t - \tfrac{6}{25}\cos 3t \\ &= \sqrt{\left(\tfrac{8}{25}\right)^2 + \left(\tfrac{6}{25}\right)^2}\left(\frac{\frac{8}{25}}{\sqrt{\left(\frac{8}{25}\right)^2+\left(\frac{6}{25}\right)^2}}\sin 3t - \frac{\frac{6}{25}}{\sqrt{\left(\frac{8}{25}\right)^2+\left(\frac{6}{25}\right)^2}}\cos 3t\right) \\ &= \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{4}{5}\sin 3t - \tfrac{3}{5}\cos 3t\right). \end{aligned}$$

Ricordando la formula di sottrazione del seno $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ e osservando che

$$\arccos\frac{4}{5} = \arcsin\frac{3}{5} = \arctan\frac{3}{4}$$

si ottiene infine

$$y_\infty(t) = \frac{2}{5}\sin(3t - \arctan\frac{3}{4}),$$

che è il risultato trovato in precedenza.

5.6 Esercizio

Studiare la risposta all'impulso del sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{2se^{-\tau s}}{(s+1)(s+\lambda)},$$

al variare dei parametri $\tau, \lambda \geq 0$.

Soluzione

Considerando dapprima il caso $\tau = 0$, la trasformata dell'uscita risulta:

$$Y(s) = W(s) \cdot 1 = \frac{2s}{(s+1)(s+\lambda)}.$$

Nel caso $\lambda \neq 1$ lo sviluppo di Heaviside di $Y(s)$ è

$$\frac{2s}{(s+1)(s+\lambda)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+\lambda}.$$

Portando a comun denominatore gli addendi di destra e imponendo l'identità dei polinomi a numeratore si ottengono le seguenti condizioni su A e B:

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 0 &= \lambda A + B \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$A = \frac{2}{1-\lambda}, \quad B = -\frac{2\lambda}{1-\lambda}.$$

Antitrasformando la Y(s) si ha allora:

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-\lambda t} = \frac{2}{1-\lambda}e^{-t} - \frac{2\lambda}{1-\lambda}e^{-\lambda t}. \tag{22}$$

Se $\lambda = 1$ la trasformata Y(s) dell'uscita risulta avere un polo di molteplicità doppia e quindi il suo sviluppo di Heaviside è il seguente (si noti per inciso che i coefficienti A e B precedentemente trovati non sono definiti per $\lambda = 1$):

$$\frac{2s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}.$$

Portando gli addendi di destra al comun denominatore $(s+1)^2$ e imponendo l'identità dei polinomi a numeratore si ottengono le condizioni:

$$\begin{aligned} 2 &= A \\ 0 &= A + B \end{aligned}$$

da cui $B = -2$ e dunque

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Ricordando che $L(t^k e^{\lambda t}) = \frac{k!}{(s-\lambda)^{k+1}}$ e antitrasformando si ha infine:

$$y(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t}. \tag{23}$$

Ci si potrebbe chiedere se il comportamento di $y(t)$ sia continuo in $\lambda = 1$. La risposta è affermativa, poiché si può far veder che la (23) è il limite della (22) per $\lambda \to 1$: è sufficiente riguardare la (22) come funzione di λ, passare al limite ed applicare la regola di L'Hopital (si invita a farlo per esercizio).

Nei casi in cui $\tau > 0$ la risposta dell'uscita risulta essere:

$$Y(s) = \frac{2se^{-\tau s}}{(s+1)(s+\lambda)}.$$

Ricordando che il fattore $e^{-\tau s}$ determina una traslazione di τ nel dominio del tempo, si può affermare che la risposta all' impulso per $\tau > 0$ corrisponde alle risposte determinate in precedenza ritardate di τ, ossia:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \tau \\ \frac{2}{1-\lambda}e^{-(t-\tau)} - \frac{2\lambda}{1-\lambda}e^{-\lambda(t-\tau)} & t \geq \tau \end{cases}$$

nel caso $\lambda \neq 1$ e

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \tau \\ 2e^{-(t-\tau)} - 2(t-\tau)e^{-(t-\tau)} & t \geq \tau \end{cases}$$

nel caso $\lambda = 1$.

6 Esercizi completi

6.1 Esercizio

Un ambiente è riscaldato tramite un radiatore elettrico che dissipa una potenza $P_r = 2kW$. La capacità termica del radiatore è $C_r = 8000J/^oC$ e la sua resistenza termica verso l'ambiente è $\vartheta_{ra} = 0.04^oC/W$. La capacità termica dell'ambiente sia $C_a = 800000J/^oC$ e la resistenza termica verso l'esterno sia $\vartheta_{ae} = 0.01^oC/W$.

1. Ricavare una rappresentazione di stato del sistema, assumendo come variabili di stato le temperature del radiatore (T_r) e dell'ambiente (T_a) rispetto alla temperatura T_e dell'ambiente esterno, considerata costante.
2. Calcolare il tempo necessario per portare l'ambiente da 10^oC a 20^oC per $T_e = 10^oC$.
3. Calcolare l'andamento a regime della temperatura T_a a radiatore spento assumendo che la temperatura esterna T_e vari nel tempo tra $T_e^{max} = 35^oC$ e $T_e^{min} = 5^oC$ con andamento sinusoidale di periodo $T = 24h$.

Soluzione

1. La potenza dissipata dal radiatore in parte concorre ad aumentarne la temperatura e in parte viene ceduta all'ambiente:
$$P_r = C_r\dot{T}_r + \frac{T_r - T_a}{\vartheta_{ra}}. \tag{24}$$
La potenza in ingresso all'ambiente in parte concorre ad aumentarne la temperatura e in parte viene ceduta all'esterno:
$$\frac{T_r - T_a}{\vartheta_{ra}} = C_a\dot{T}_a + \frac{T_a - T_e}{\vartheta_{ae}}. \tag{25}$$
ponendo $u = P_r$, $x_1 = T_r - T_e$, $x_2 = T_a - T_e$ e ricordando che T_e è costante, le due equazioni precedenti possono essere scritte nel modo seguente:
$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -\frac{1}{C_r\vartheta_{ra}}x_1 + \frac{1}{C_r\vartheta_{ra}}x_2 + \frac{1}{C_r}u \\ \dot{x}_2 & = & \frac{1}{C_a\vartheta_{ra}}x_1 - \left(\frac{1}{C_a\vartheta_{ra}} + \frac{1}{C_a\vartheta_{ae}}\right)x_2 \end{array}$$
Assumendo come uscita la temperatura dell'ambiente rispetto all'esterno si avrà:
$$y = x_2.$$
Il sistema è dunque lineare ed è descritto dalle matrici seguenti:
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{320} & \frac{1}{320} \\ \frac{1}{32000} & -\frac{1}{6400} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{8000} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché gli autovalori di A sono

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -3.15754 \cdot 10^{-3} \\ \lambda_2 &= -1.23712 \cdot 10^{-4},\end{aligned}$$

il sistema è asintoticamente stabile.

2. Assumendo che anche il radiatore si trovi inizialmente alla temperatura di 10^oC, lo stato iniziale del sistema è

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dunque si tratta di calcolare la risposta al gradino di ampiezza P_r a partire da condizioni iniziali nulle. Sfruttando la particolare forma di B e C si può calcolare facilmente la funzione di trasferimento $W(s)$ che risulta

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{\alpha_{12} b_1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} = \frac{3.90625 \cdot 10^{-9}}{(s + 3.15754 \cdot 10^{-3})(s - 1.23712 \cdot 10^{-4})},$$

dove α_{12} denota il complemento algebrico dell'elemento di indici $1, 2$ della matrice $sI - A$ e b_1 l'elemento non nullo di B. La trasformata di Laplace dell'uscita in corrispondenza di un ingresso a gradino di ampiezza $P_r = 2000W$ risulta pertanto

$$Y(s) = \frac{3.90625 \cdot 10^{-9}}{(s + 3.15754 \cdot 10^{-3})(s + 1.23712 \cdot 10^{-4})} \frac{2000}{s} = \frac{7.81250 \cdot 10^{-6}}{s(s + 3.15754 \cdot 10^{-3})(s + 1.23712 \cdot 10^{-4})}$$

e può essere espressa come somma di frazioni parziali come segue:

$$Y(s) = \frac{20}{s} + \frac{0.81550}{s + 3.15754 \cdot 10^{-3}} - \frac{20.81550}{s + 1.23712 \cdot 10^{-4}}.$$

Pertanto, la risposta $y(t)$ cercata è

$$y(t) = 20 + 0.81550 e^{-3.15754 \cdot 10^{-3} t} - 20.81550 e^{-1.23712 \cdot 10^{-4} t} \quad t \geq 0$$

il cui andamento è riportato in Fig.11. Affinché la temperatura dell'ambiente sia di 20^oC, l'uscita deve essere pari a 10^oC (la sovratemperatura rispetto a $T_e = 10^oC$), ossia deve essere

$$10 = 20 + 0.81550 e^{-3.15754 \cdot 10^{-3} t} - 20.81550 e^{-1.23712 \cdot 10^{-4} t}.$$

Risolvendo numericamente si trova che l'ambiente raggiunge la tempertura di 20^oC in un tempo

$$\bar{t} = 5928.47s \approx 1h\ 38'\ 48''.$$

3. Il modello ricavato al punto 1, poiché assume T_e costante, non è adatto allo scopo. È invece necessario ricavare una nuova rappresentazione di stato per il sistema in cui T_e sia

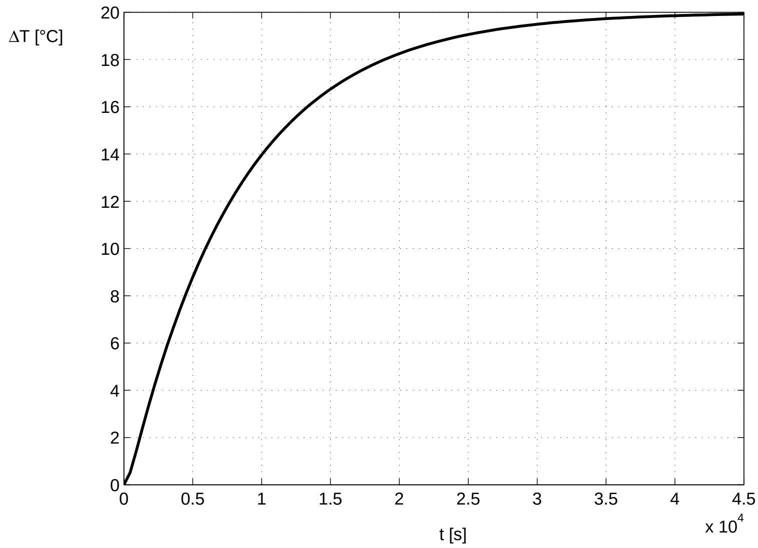

Figura 11:

l'ingresso e T_a l'uscita. Le equazioni (24) e (25) naturalmente sono ancora valide; ponendo $P_r = 0$ e riarrangiando si trova

$$\begin{array}{rcl} \dot{T}_r & = & -\frac{T_r}{C_r\vartheta_{ra}} + \frac{T_a}{C_r\vartheta_{ra}} \\ \dot{T}_a & = & \frac{T_r}{C_a\vartheta_{ra}} - \left(\frac{1}{C_a\vartheta_{ra}} + \frac{1}{C_a\vartheta_{ae}}\right)T_a + \frac{1}{C_a\vartheta_{ae}}T_e \end{array}.$$

Tali equazioni rappresentano un sistema lineare avente $T_r(t)$ e $T_a(t)$ come variabili di stato e $T_e(t)$ come ingresso. Si potrebbe allora porre $y(t) = T_a(t)$, studiare la risposta di tale sistema all'ingresso

$$T_e(t) = \frac{T_e^{max} + T_e^{min}}{2} + \frac{T_e^{max} - T_e^{min}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 20 + 15\sin\left(7.2722 \cdot 10^{-5}t\right)$$

e valutarne il comportamento a regime (si invita a farlo per esercizio).

In alternativa si può sfruttare la proprietà che la funzione di trasferimento valutata in $j\omega$ fornisce, in modulo e fase, la risposta a regime ad un ingresso sinusoidale di ampiezza unitaria. Detto $\bar{T} = \frac{T_e^{max}+T_e^{min}}{2}$, ponendo $x_1 = T_r - \bar{T}$, $x_2 = T_a - \bar{T}$, $u = T_e - \bar{T}$ e $y = T_a - \bar{T}$ ci si riconduce allo studio della risposta a regime del sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -\frac{x_1}{C_r\vartheta_{ra}} + \frac{x_2}{C_r\vartheta_{ra}} \\ \dot{x}_2 & = & \frac{x_1}{C_a\vartheta_{ra}} - \left(\frac{1}{C_a\vartheta_{ra}} + \frac{1}{C_a\vartheta_{ae}}\right)x_2 + \frac{1}{C_a\vartheta_{ae}}u \\ y & = & x_2 \end{array}$$

sottoposto all'ingresso

$$u(t) = \frac{T_e^{max} - T_e^{min}}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right). \tag{26}$$

Pertanto, detta $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema si avrà:

$$y_\infty(t) = \frac{T_e^{max} - T_e^{min}}{2}|W(j\omega)|\sin(\omega t + \phi(W(j\omega))).$$

Il sistema è descritto dalle matrici seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{320} & \frac{1}{320} \\ \frac{1}{32000} & -\frac{1}{6400} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{8000} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si noti che la matrice A è la stessa del caso precedente poiché esprime la dinamica propria del sistema, ovvero i legami fra le variabili di stato (T_r e T_a) ed è pertanto indipendente dalla scelta dell'ingresso. Anche in questo caso la particolare forma di B e C permette di calcolare facilmente la funzione di trasferimento, che risulta essere

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1.25 \cdot 10^{-4}s + 3.906 \cdot 10^{-7}}{(s + 3.15754 \cdot 10^{-3})(s - 1.23712 \cdot 10^{-4})}.$$

Poiché risulta

$$|W(j\omega)| = 0.8621, \qquad \phi(W(j\omega)) = -0.5312$$

si avrà

$$y_\infty(t) = 12.932 \sin(7.2722 \cdot 10^{-5} t - 0.5312),$$

e quindi

$$T_{a,\infty}(t) = 20 + 12.932 \sin(7.2722 \cdot 10^{-5} t - 0.5312).$$

Ciò significa che la temperatura dell'ambiente varia fra $20 - 12.932 = 7.068^o C$ e $20 + 12.932 = 32.932^o C$ ed è sfasata in ritardo rispetto alla temperatura esterna di $\frac{0.5312 \cdot 24}{2\pi} \approx 2$ ore, come si vede in Fig.12 (che riporta in grigio l'ingresso e in nero la risposta totale, comprensiva cioè del transitorio iniziale che però diventa ben presto trascurabile).

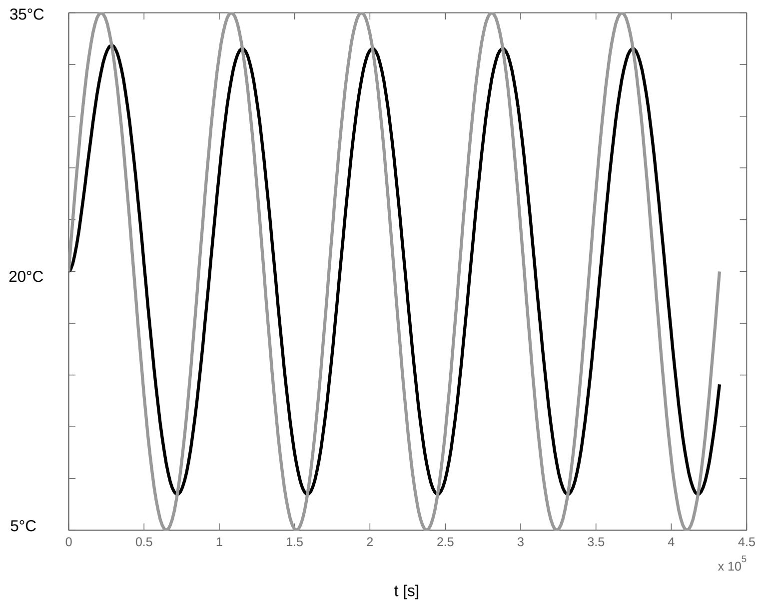

Figura 12:

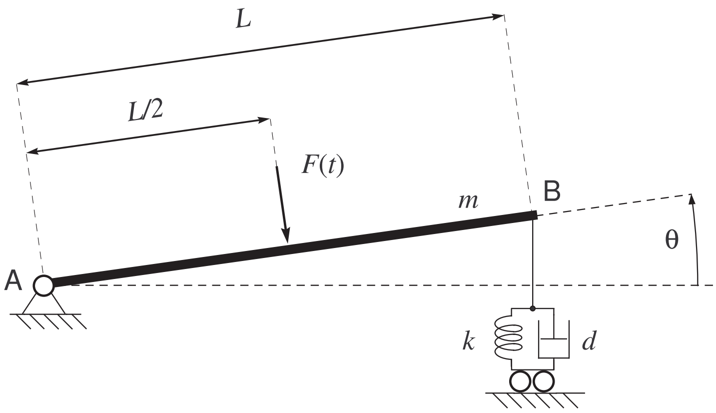

Figura 13:

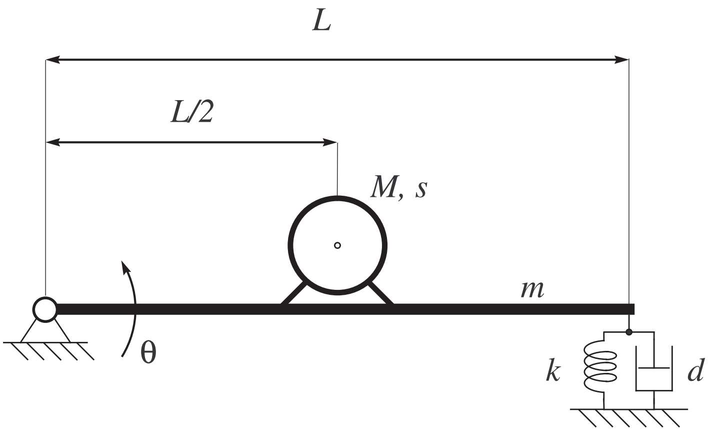

Figura 14:

6.2 Esercizio

Un'asta rigida e omogenea (Fig.13) di lunghezza L e massa m è incernierata ad una estremità e vincolata a muoversi su un piano verticale. L'altra estremità poggia su un carrello ed è soggetta a una forza elastica di costante k e ad uno smorzamento d. Un carico $F(t)$ agisce sulla mezzeria perpendicolarmente all'asta. Detto ϑ l'angolo formato dall'asta con l'orizzontale, il sistema è retto dall'equazione

$$I\ddot{\vartheta} = -mg\frac{L}{2}\cos\vartheta - kL(L\sin\vartheta - \Delta l) - L^2\dot{\vartheta}d\cos\vartheta - F\frac{L}{2}\cos\vartheta, \tag{27}$$

dove I è il momento di inerzia dell'asta rispetto alla cerniera e Δl è la compressione della molla per $\theta = 0$.

1. Ricavare una rappresentazione di stato per il sistema assumendo come ingresso il carico $F(t)$.

2. Calcolare Δl affinché, in assenza di carico, si abbia equilibrio per $\vartheta = 0$.

3. Linearizzare il sistema attorno al punto di equilibrio corrispondente a $\theta = 0$ e $F = 0$.

4. Sfruttare il risultato del punto precedente per studiare il comportamento alle piccole oscillazioni del sistema illustrato in Fig.14 dove un motore elettrico di massa $M = 50Kg$ e sbilanciamento $s = 2.5Kg \cdot m$ è posto sulla mezzeria di un'asta di lunghezza $L = 2m$ e massa $m = 80Kg$. In particolare, calcolare l'ampiezza delle oscillazioni per $k = 10^4 \frac{N}{m}$ e $d = 10^2 \frac{Ns}{m}$ se il motore opera a $n = 2950rpm$.

Soluzione

1. Posto $x_1(t) = \vartheta(t)$, $x_2(t) = \dot{\vartheta}(t)$ e $u(t) = F(t)$, l'equazione del secondo ordine (27) è equivalente alle seguenti due equazioni del primo ordine:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{mgL}{2I}\cos x_1 - \frac{kL}{I}(L\sin x_1 - \Delta l) - \frac{L^2 d}{I} x_2 \cos x_1 - u\frac{L}{2I}\cos x_1,
\end{aligned}
$$

che sono la rappresentazione di stato cercata.

2. All'equilibrio deve essere $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Posto poi $u = 0$ e $x_1 = \vartheta = 0$, le due equazioni precedenti diventano:

$$
\begin{aligned}
0 &= x_2 \\
0 &= -\frac{mgL}{2I} + \frac{kL}{I}\Delta l - \frac{L^2 d}{I} x_2,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\Delta l = \frac{mg}{2k}.
$$

3. La rappresentazione di stato trovata al punto 1 è del tipo:

$$
\dot{x} = f(x, u).
$$

Calcolando lo Jacobiano della trasformazione f in corrispondenza di $x_1 = x_2 = u = 0$, si ottiene il sistema lineare

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 && (28)\\
\dot{x}_2 &= -\frac{kL^2}{I} x_1 - \frac{L^2 d}{I} x_2 - \frac{L}{2I} u, && (29)
\end{aligned}
$$

le cui matrici associate sono

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{kL^2}{I} & -\frac{L^2 d}{I} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{L}{2I} \end{bmatrix}
$$

e che descrive il comportamento del sistema alle piccole oscillazioni. Si noti che alle piccole oscillazioni la gravità è ininfluente (perché?).

4. Lo sbilanciamento s genera una forza centrifuga di intensità $|F| = s\omega^2$ dove $\omega = \frac{2\pi n}{60}$; considerando la sola componente verticale di tale forza (la componente orizzontale non influisce su ϑ), il sistema illustrato in Fig.14 può essere schematizzato come in Fig.15 e dunque descritto dalle (28) e (29), a patto di porre $I = m\frac{L^2}{3} + M\frac{L^2}{4}$ (la somma dei momenti di inerzia dell'asta e del motore rispetto alla cerniera). Si noti che la forzante $F(t)$ è sinusoidale di pulsazione ω, dal momento che è la proiezione lungo la verticale della forza centrifuga, che ruota appunto ad una velocità di $\omega\ rad/s$. Ponendo $C = [\ 1\ 0\ ]$ si ha poi

$$y(t) = Cx(t) = \vartheta(t).$$

La funzione di trasferimento risulta

$$W(s) = -\frac{L/2}{Is^2 + dL^2 s + kL^2}.$$

L'ampiezza della risposta a regime ad un ingresso sinusoidale di pulsazione ω e ampiezza $|F| = s\omega^2$ è allora:

$$A = |F||W(j\omega)| = s\omega^2 \left| -\frac{L/2}{I(j\omega)^2 + dL^2(j\omega) + kL^2} \right|.$$

Sostituendo i valori forniti si ottiene infine:

$$A \approx 0.016 rad,$$

che corrisponde a spostamenti massimi all'estremità dell'asta di $\pm 0.032m$.

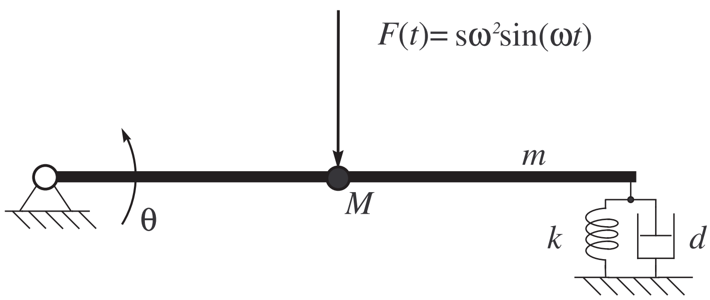

Figura 15: